ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА КАК СПОСОБ СНИЖЕНИЯ ТЕХНОГЕННЫХ РИСКОВ

А.Ю. Лабинский, кандидат технических наук, доцент;
Т.А. Подружкина, кандидат педагогических наук.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Изложена постановка задачи по созданию математических моделей оптимизации параметров сложных объектов, которые могут использоваться с целью снижения техногенных рисков, связанных с возникновением чрезвычайных ситуаций. Из многообразия математических моделей выбраны модели случайного поиска при наличии ограничений.

Ключевые слова: математическая модель, целевая функция, оптимизация с ограничениями, случайный поиск

RANDOM SEARCH METHOD OF OPTIMIZATION AS THE WAY OF DECREASE OF TECHNOLOGICAL RISKS

A.Yu. Labinsky; T.A. Podruzhkina.
Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

In the articles explain problem definition for creation of the random search method mathematical models with the purpose decrease of technological risks to give target of modeling and classification of mathematical models the random search method of optimization of complex objects. To selected mathematical models the random search method of constrained optimization.

Keywords: mathematical model, goal function, constrained optimization, random search

Современное направление развития методов анализа сложных явлений и процессов основывается на построении и практической реализации различной степени сложности моделей. Одним из важнейших методологических принципов моделирования сложных явлений и процессов является принцип оптимизации. Данный принцип помогает разработать такое описание исследуемого явления, которое обеспечивало бы заданную точность и достоверность моделирования при минимальных затратах на разработку модели.

Моделирование включает в себя построение математической модели объекта, реализацию данной модели на ЭВМ, проведение на ней серии экспериментов и распространение полученных результатов на исследуемый объект. Классификация методов оптимизации может быть дана по различным признакам [1].

Математической модели сложного объекта присуще множество ограничений в форме равенств и неравенств. Параметры такой модели целесообразно систематизировать, разделив их на следующие группы:

– технологические параметры связей;

– конструктивно-компоновочные параметры узлов и элементов.

К первой группе относятся параметры рабочего процесса объекта. Особенность этих параметров – возможность их систематического изменения в процессе функционирования объекта. Это непрерывно и дискретно изменяющиеся параметры.

Ко второй группе относятся величины, характеризующие конструктивно-компоновочные параметры элементов, составляющих объект, и их взаимное влияние. Изменение этих параметров носит дискретный характер.

Ограничения накладываются на технологические параметры рабочего процесса, исходя из требований длительного и устойчивого функционирования объекта.

Обобщенной математической формулировкой задачи оптимизации характеристик объекта является определение максимума или минимума нелинейной функции (функции качества или целевой функции) вида:

$Q = Q[\, X, Y(X), Z, P \,]$ при наличии ограничений в виде равенств и неравенств вида:

$$\Phi[\, X, Y(X), Z \,] = 0;\ F_{min} \le F[\, X, Y(X), Z \,] \le F_{max};\ Y_{min} \le Y[\, X, Y(X), Z \,] \le Y_{max}.$$

Ограничения на независимые переменные и конструктивные параметры:

$$X_{min} \le X \le X_{max};\ Z_{min} \le Z \le Z_{max},$$

где X – независимые переменные; Y – зависимые переменные; Z – конструктивные параметры, имеющие непрерывный характер изменения; P – конструктивные параметры, имеющие дискретный характер изменения; F – совокупность технологических характеристик элементов объекта; Ф – совокупность балансовых уравнений для всех элементов объекта оптимизации.

Таким образом, математическая модель сложного объекта представляет собой совокупность основных и вспомогательных, в общем случае существенно нелинейных, уравнений. При отыскании максимума или минимума целевой функции многих переменных часто получают сложную систему уравнений, явное дифференцирование которых затруднено или невозможно. В этом случае нельзя использовать такие наиболее сильные методы оптимизации, как метод динамического программирования Беллмана [2] и принцип максимума Понтрягина [3]. Принципиальным недостатком аналитического метода множителей Лагранжа [4] является невозможность решения задач, имеющих ограничения не только в форме равенств, но и неравенств. Поэтому задача оптимизации характеристик сложного объекта в общем случае является задачей нелинейного программирования.

Широкое использование ЭВМ стимулировало развитие поисковых методов оптимизации. Однако среди поисковых методов не существует универсального (например, такого как симплекс-метод в линейном программировании [5]), который позволял бы получать оптимальное решение для любой задачи нелинейной оптимизации.

Таким образом, в тех случаях, когда критерий оптимальности или ограничения являются нелинейными функциями, задача оптимизации называется задачей нелинейной оптимизации. В частности, если критерий оптимальности является квадратичной функцией, а ограничения линейные, то такая задача называется задачей квадратичного программирования. Простейшими из нелинейных функций являются выпуклые функции, то есть функции, расположенные ниже любой прямой, соединяющей две точки на ее поверхности. Более общий класс нелинейных функций составляют унимодальные функции, имеющие единственный (локальный) оптимум. Функции, имеющие несколько локальных оптимумов, называются многоэкстремальными функциями.

Постановка задачи

Задание ограничений на выбор возможных значений оптимизируемых параметров придает задаче поиска оптимума конкретный практических смысл. В задаче оптимизации можно выделить ограничения на значения оптимизируемых параметров (ограничения первого рода) и ограничения на значения функции от оптимизируемых параметров (ограничения второго рода).

Пусть ограничения первого рода заданы в виде:

$$0 \le X_{i\,min} \le X_i \le X_{i\,max},$$

где X_i – переменные в задаче поиска; $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ограничения второго рода могут иметь следующий вид:

$$G_{smin}(X_1, X_2, \ldots, X_k) \le G_s(X_1, X_2, \ldots, X_k) \le G_{smax}(X_1, X_2, \ldots, X_k),$$

где $s = 1, 2, \ldots$.

Ограничения второго рода иногда удобно записывать в виде:

$$G_s(X) \le 0.$$

Особенности постановки задачи случайного поиска следующие [6]:

1. Математическая модель представляет собой системы соотношений (формул, уравнений), которая путем задания определенной последовательности действий для каждого вектора X позволяет вычислить значение целевой функции при наличии заданных ограничений.

2. Целевая функция и ограничения полностью определяются совокупностью значений оптимизируемых параметров (многопараметрическая оптимизация).

3. Математическая модель включает в себя целевую функцию и ограничения, не содержащие случайного фактора.

4. Целевая функция и ограничения неизменны во времени (стационарная задача поиска оптимума).

На практике оптимизируемые параметры могут иметь различный физический смысл и различные числовые значения. Поэтому целесообразно перейти от физических параметров X_i к безразмерным параметрам Z_i с помощью следующего линейного преобразования:

$$Z_i = (X_i - X_{imin})/(X_{imax} - X_{imin}) \text{ или } X_i = X_{imin} + (X_{imax} - X_{imin})*Z_i,$$

где $0 \le Z_i \le 1$.

Рассмотрим возможную схему поиска оптимума, состоящую из следующих этапов:

1. Задается начальная допустимая точка поиска $Z(0)$.

2. Выбирается шаг $\Delta Z(0)$ из точки $Z(0)$.

3. Определяется новая точка поиска $Z(1) = Z(0) + \Delta Z(0)$.

4. Оценивается новая точка $Z(1)$ и т.д.

В результате поиска может быть получена некоторая последовательность точек $Z(0)$, $Z(1)$, $Z(2)$, …, $Z(n-1)$, $Z(n)$, $Z(n+1)$. Если в этой последовательности все точки выбраны таким образом, что выполняются ограничения первого и второго рода, то при существенном увеличении количества шагов $n \rightarrow \infty$ будет получено оптимальное значение Z^*.

Приведенная выше схема поиска оптимума дает возможность использовать различные алгоритмы, которые могут отличаться выбором направления поиска и величины шага. Априорные сведения о свойствах целевой функции и ограничений позволяют применять эффективные алгоритмы поиска оптимума. В условиях, когда априорных сведений о свойствах целевой функции и ограничений нет, весьма эффективны алгоритмы поиска, основанные на принятии решений на основании случайности [6]. Наиболее распространенными методами случайного поиска являются следующие:

1. Случайный поиск с линейной тактикой:

– чисто случайная оценка направления спуска;

– оценка направления по наилучшей случайной пробе;

– оценка направления методом статистического градиента;

– ортогонализированный метод статистического градиента.

2. Локальный случайный поиск:

– спуск с парными пробами;

– совмещенный спуск;

– экстраполяционный спуск.

Случайный поиск эффективен при оптимизации объектов большой размерности вдали от экстремума. В обстановке малой размерности ($k \le 3$) и в районе экстремума целесообразно действовать методами градиентного поиска.

Алгоритм поиска оптимума

Данный алгоритм случайного поиска приведен в работе «Алгоритмы и программы случайного поиска» [7]. Пусть требуется найти минимальное значение целевой функции. Случайный шаг поиска определяется зависимостью:

$$\Delta Z(n) = M * m(n) * E(n),$$

где $E(n)$ – нормальный случайный вектор, компоненты которого нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; M – матрица индивидуальных масштабов размером $k*k$, с помощью которой можно влиять на скорость и точность процесса оптимизации, $m(n)$ – масштаб шага, задаваемый для всех компонент вектора $\Delta Z(n)$ по формуле:

$$m(n) = \exp(-0{,}001*(N^2 + N_{max}^2 + k^2)),$$

где N – число неудачных шагов, совершенных из последней опорной точки поиска; N_{max} – наибольшее значение числа неудачных шагов, совершенных из какой-либо опорной точки поиска за весь предшествующий период оптимизации; k – число оптимизируемых параметров.

При таком способе задания случайного шага происходит одновременный выбор направления шага и его величины. На среднее значение модуля шага оказывает влияние только качественная характеристика в приращении целевой функции, так как масштаб шага зависит от знака приращения целевой функции. При положительном значении приращения целевой функции происходит возрастание числа неудачных шагов N и уменьшение масштаба шага $m(n)$.

По мере приближения к точке оптимума Z^* вероятность удачного шага обычно имеет тенденцию к уменьшению. Зависимость шага поиска от N_{max} позволяет уменьшить среднюю длину шага при приближении к точке оптимума. Так как все шаги, совершенные из оптимальной точки Z^*, будут неудачными, признаком окончания поиска будет служить последовательность неудачных шагов.

Приведенный выше алгоритм поиска оптимума можно усовершенствовать путем учета не только качественного, но и количественного результата шагов в процессе поиска [7]. Тогда случайный шаг поиска можно определить следующим образом:

$$\Delta Z(n) = T(n) + S(n),$$

где $T(n)$ – регулярная составляющая шага поиска; $S(n)$ – случайная составляющая шага поиска.

Регулярная составляющая шага поиска может быть определена по зависимости:

$$T(n) = q*\Sigma_{j=1}^{m}[1 + (1–j)/m]*\Delta F(n–j) /\Delta F_{ср}*\Delta Z(n–j),$$

где $\Delta F_{ср}=\Sigma_{j=1}^{m}A[j] \;/\; \Sigma_{j=1}^{m}B[j]$; $q=(1/m)*\ \Sigma_{j=1}^{m}B[j]$; $A[j]$ – матрица, в которой хранятся результаты приращений целевой функции при удачных шагах в последовательности из m предшествующих шагов; B[j] – матрица, содержащая информацию об успехе каждого шага в последовательности из последних шагов поиска. Таким образом, каждая компонента регулярной составляющей шага поиска представляет собой сумму компонент m предшествующих шагов, взятых с учетом относительной эффективности шага $\Delta F(n–j) /\Delta F_{ср}$, удаленности шага от оптимума 1 + (1–j)/m и успеха шага.

Случайная составляющая шага поиска может быть определена по зависимости:

$$S(n) = (1 – q)*M*m(n)*E(n),$$

где величины M, m(n) и E(n) имеют тот же смысл, что и в первом алгоритме поиска, приведенном выше. Величина q определяет соотношение между регулярной и случайной составляющими шага поиска $\Delta Z(n)$. Если все m шагов неудачны, то в определении шага $\Delta Z(n)$ участвует только случайная составляющая S(n), а если все шаги удачны, то только регулярная составляющая T(n).

Программа поиска оптимума по приведенным выше алгоритмам должна содержать операторы перехода от безразмерных параметров Z_i к оптимизируемым параметрам X_i , вычисления ограничений второго рода и целевой функции.

Во многих случаях выбора оптимального решения одного нахождения оптимальной точки недостаточно. Нужно знать, как ведет себя целевая функция в соседних с оптимальной точках. Поэтому желательно предусмотреть изучение поведения целевой функции при отклонении значений параметров от оптимальных.

Методы прямого поиска используют информацию только о значениях целевой функции и функций ограничений задачи оптимизации. Они широко распространены на практике, потому что не требуют от функций задачи почти никаких свойств, надежны и допускают простую реализацию. Поэтому методы прямого поиска, например приведенный метод случайного поиска, могут с успехом использоваться для оптимизации математических моделей сложных объектов.

Литература

1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1969.
4. Численные методы условной оптимизации / под ред. Ф. Гилл, У. Мюррей. М.: Мир, 1977.
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969.
6. Расстригин Л.А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968.
7. Алгоритмы и программы случайного поиска / под ред. Л.А. Расстригина. Рига: Зинатне, 1969.