О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РЯДА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ОПЕРАТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ МЧС РОССИИ

Ю.С. Баринова;
Н.В. Каменецкая, кандидат технических наук, доцент, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации;
Е.С. Калинина, кандидат педагогических наук, доцент.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Описан эффективный алгоритм для решения одной из важных задач оптимизации оперативной деятельности подразделений МЧС России на основе применения теории графов.

Ключевые слова: оптимизация, маршруты передвижения, гамильтоновы циклы

POSSIBILITY OF APPLYING THE GRAPH THEORY FOR SOLVING A NUMBER OF OPTIMIZATION PROBLEMS OF OPERATIONAL ACTIVITIES OF DIVISIONS OF EMERCOM OF RUSSIA

Yu.S. Barinova; N.V. Kamenetskaya; E.S. Kalinina.
Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

In this article, there is described an effective algorithm of solving a number of most important optimization problems of operational activities of divisions of EMERCOM of Russia based on graph theory.

Keywords: optimization, routes of movement, cycles of gamilton

В МЧС России для поддержки принятия решений по оперативным действиям, связанным с развитием чрезвычайных ситуаций (ЧС) и ходом ликвидации их последствий, а также для сбора и обработки информации о возможности возникновения ЧС созданы специальные автоматизированные системы на базе информационно-вычислительных сетей (ИВС) МЧС России. Эти системы необходимо постоянно пополнять и развивать. Применение базовых понятий и теорий аппарата классической и современной математики дает возможность разрабатывать простые, но весьма эффективные методы, алгоритмы и программы для оптимизации оперативной деятельности подразделений МЧС России в повседневной работе и при ликвидации ЧС.

При возникновении ЧС стоит первоочередная задача спасения людей, а потом уже ликвидации ее последствий. Если задержка прибытия спасателей на место происшествия будет очень велика, то это может привести к гибели пострадавших.

Наиболее выгодным маршрутом следует считать тот, на котором время доставки спасателей будет меньше. Поэтому более правильно в качестве критерия оптимальности принимать время доставки спасателей, а не длину маршрута. При этом задача заключается в определении плана перевозок, при котором вся аварийно-спасательная и пожарная техника будет доставлена в кратчайший срок.

Задача сокращения времени прибытия спасателей в реально сложившейся обстановке зависит от качественного и своевременного решения задачи управления, связанной с планированием и выбором оптимальных маршрутов передвижения сил и средств к месту возникновения ЧС. Поэтому актуальным является решение одной из основных задач МЧС России по нахождению оптимальных маршрутов передвижения сил и средств подразделениями МЧС России в условиях ограничения времени.

В виду того, что на рассматриваемой территории в зоне ЧС находится большое число (несколько десятков) пунктов, а также возможных маршрутов передвижения, то для решения поставленной задачи применяется математический аппарат теории графов и методы решения экстремальных задач на графах. В отечественной и зарубежной литературе описан ряд методов по решению оптимальных задач на графах. Для решения поставленной выше задачи важно выбрать такой метод, который позволит доставить силы и средства к месту ЧС не только в кратчайшие сроки, но и во все населенные пункты в зоне ЧС. Для достижения этой цели можно рассмотреть в теории графов различные методы нахождения так называемых гамильтоновых циклов, или, в крайнем случае, гамильтоновых путей.

Цикл (путь) называется гамильтоновым, если он проходит через каждую величину графа ровно один раз.

С понятием гамильтоновых циклов тесно связна так называемая задача коммивояжера: в нагруженном (по времени или по расстоянию) графе определить гамильтонов цикл (или, в крайнем случае, путь) минимальный по времени или по расстоянию. Иными словами, коммерсант должен совершить поездку по всем населенным пунктам и вернуться обратно, побывав в каждом населенном пункте ровно один раз, и при этом стоимость такой поездки должна быть минимальной.

Интерпретация задачи нахождения гамильтоновых циклов (путей) для решения поставленной выше задачи состоит в том, чтобы доставить силы и средства МЧС России в зону ЧС ко всем пострадавшим объектам ровно по одному разу, при этом суммарное время (или суммарное расстояние) должно быть минимальным. Среди всех найденных гамильтоновых циклов (путей) необходимо выбрать минимальный по времени (или по расстоянию).

Таким образом, сетке дорог ставится в соответствие ориентированный граф, вершинами которого являются узлы данной сетки (населенные пункты), а ребрами – отрезки дорог между узлами (движение по дороге может быть односторонним). Каждому ребру приписывается длина – расстояние между соответствующими узлами. Ищется набор оптимальных маршрутов, начинающихся и заканчивающихся в заданных точках, и ограниченных некоторой функцией от длин ребер графа, которая может учитывать физическую длину маршрута (километраж), либо время движения транспорта.

Расстояния между объектами задаются матрицей расстояний $A = [a(i, j)]$ размерности $n \times n$, где $a(i, j)$ – расстояние от пункта i до пункта j. Отметим, что в общем случае матрица расстояний не является симметричной (разностороннее движение, сложные транспортные развязки и т.д.).

Так как рассматривается большая территория и граф имеет десятки-сотни вершин и дуг, то решение поставленной задачи доставки сил и средств предполагается осуществлять в два этапа. На первом этапе решается задача разбиения региона на компактные зоны обслуживания (группирование объектов, которые обслуживаются для каждого маршрута). В каждой зоне значительно сокращается количество элементов графа, что в дальнейшем позволит более эффективно решать задачу выбора оптимальных маршрутов. Первую задачу будем называть задачей кластеризации. На втором этапе решается задача нахождения оптимального по заданному критерию (суммарному расстоянию или времени) доставки сил и средств к объектам, которые обслуживаются для каждого маршрута. Эту задачу будем называть задачей маршрутизации. После решения двух задач формируются рекомендации по выбору в каждой зоне конкретных оптимальных маршрутов и расписания движения для всех транспортных средств, перевозящих подразделения МЧС России.

Если на графе, соответствующем сетке дорог, гамильтоновых циклов (путей) не обнаруживается, необходимо разбить исходный граф на подграфы и повторить процедуру для каждого подграфа.

Необходимо отметить, что алгоритм Дейкстры [1] по нахождению кратчайшего пути из пунктов А в пункт В при решении данной задачи неприемлем, так как при этом многие объекты в зоне ЧС, нуждающиеся в помощи подразделений МЧС России, останутся вне обслуживания.

Математическая постановка и решение задачи по нахождению гамильтоновых циклов (путей) на графе

В зарубежной и отечественной литературе описаны несколько алгоритмов нахождения гамильтоновых циклов (путей) на графах, которые отличаются трудоемкостью, производительностью, быстродействием и эффективностью [1–6].

Пока неизвестно никакого простого критерия или алгебраического метода, позволяющего ответить на вопрос, существует или нет в произвольном графе гамильтонов цикл [1]. Критерии существования, данные в работах Поша [7], Неша-Уильямса [8] и Оре [9], представляют теоретический интерес, но являются слишком общими и не пригодны для произвольных графов, встречающихся на практике. Алгебраические методы определения гамильтоновых циклов [1, 5, 10] не могут быть применены к задачам с более чем несколькими десятками вершин, так как они требуют слишком большого времени работы и большей памяти компьютера. Более приемлемым является метод перебора Робертса и Флореса [3, 4], который не предъявляет чрезмерных требований к памяти компьютера. Он может быть использован для нахождения гамильтоновых циклов в очень больших графах.

В противоположность алгебраическим методам [5, 10], с помощью которых пытаются найти сразу все гамильтоновы циклы и при реализации которых приходится хранить поэтому все цепи, которые могут оказаться частями таких циклов, метод перебора имеет дело с одной цепью, непрерывно продлеваемой вплоть до момента, когда либо получается гамильтонов цикл, либо становится ясно, что эта цепь не может привести к гамильтонову циклу. Тогда цепь модифицируется некоторым систематическим способом (который гарантирует, что, в конце концов, будут исчерпаны все возможности), после чего продолжается поиск гамильтонова цикла. В этом способе для поиска требуется очень небольшой объем памяти и за один раз находится один гамильтонов цикл.

Следующая схема перебора, использующая обычную технику возвращения, была предложена Робертсом и Флоресом [1, 3, 4]. Начинают с построения (k х n) – матрицы М=[m_{ij}], где элемент m_{ij} есть i-я вершина (скажем x_q), для которой в графе G=(Х, Г) существует дуга (x_j, x_q). Вершины x_q в множестве Г (x_j) можно упорядочить произвольно, образовав элементы j-го столбца матрицы М. Число строк k матрицы М будет равно наибольшей полустепени исхода вершины.

Метод состоит в следующем. Некоторая начальная вершина (скажем, x_1) выбирается в качестве отправной и образует первый элемент множества S, которое каждый раз будет хранить уже найденные вершины строящейся цепи. К S добавляется первая вершина (например, вершина a) в столбце x_1. Затем к множеству S добавляется первая возможная вершина (например, вершина b) в столбце a, потом добавляется к S первая возможная вершина (например, вершина c) в столбце b и т.д. Под «возможной» вершиной понимают вершину, еще не принадлежащую S. Существуют две причины, препятствующие включению некоторой вершины на шаге r в множестве $S = \{x_1, a, b, c, \ldots, x_{r-1}, x_r\}$. Или (1) в столбце x_r нет возможной вершины, или (2) цепь, определяемая последовательностью вершин в S, имеет длину n-1, то есть является гамильтоновой цепью.

В случае (2):

а) в графе G существует дуга (x_r, x_1), и поэтому найден гамильтонов цикл, или

б) дуга (x_r, x_1) не существует, и не может быть получен никакой гамильтонов цикл.

В случаях (1) и (2б) следует прибегнуть к возвращению, в то время как в случае (2а) можно прекратить поиск и напечатать результат (если требуется найти только один гамильтонов цикл) или (если нужны все такие циклы) произвести печать и прибегнуть к возвращению. Возвращение состоит в удалении последней включенной вершины x_r из S, после чего остается множество $S = \{x_1, a, b, c, \ldots, x_{r-1}\}$, и добавлении к S первой возможной вершины, следующей за x_r, в столбце x_{r-1} матрицы M. Если не существует никакой возможной вершины, делается следующий шаг возвращения и т.д.

Поиск заканчивается в том случае, когда множество S состоит только из вершины x_1 и не существует никакой возможной вершины, которую можно добавить к S, так что шаг возвращения делает множество S пустым. Гамильтоновы циклы, найденные к этому моменту, являются тогда всеми гамильтоновыми циклами, существующими в графе.

Пример 1. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке [1]. Матрица M приводится ниже, вершины в каждом столбце расположены в алфавитном порядке:

$$M = \begin{array}{c|cccccc|} & a & b & c & d & e & f \\ \hline 1 & b & c & a & c & c & a \\ 2 & \_ & e & d & f & d & b \\ 3 & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \hline \end{array}$$

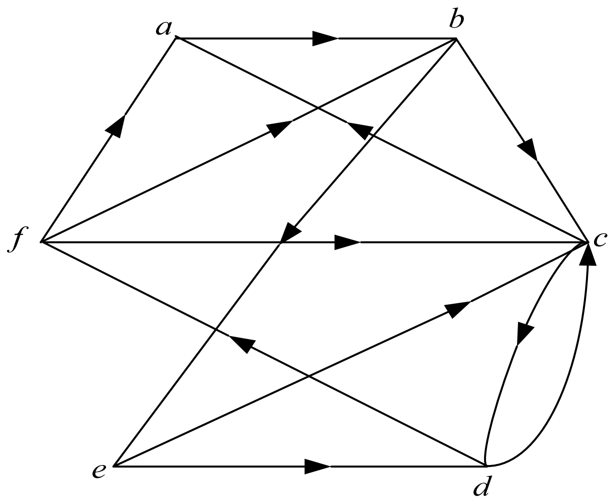

Рис. **Граф из примера 1**

Поиск гамильтоновых циклов производится так (вершина a берется в качестве отправной вершины):

Множество S	*Комментарии*
1. a	Добавляем первую возможную вершину в столбце a (то есть вершину b)
2. a, b	Добавляем первую возможную вершину в столбце b (то есть вершину c)
3. a, b, c	Первая вершина (a) в столбце c не является возможной ($a \in S$), добавляем следующую вершину в столбце (то есть вершину d)

4. *a, b, c, d*	Добавляем вершину *f*
5. *a, b, c, d, f*	В столбце *f* нет возможной вершины. Возвращение
6. *a, b, c, d*	В столбце *d* не существует возможной вершины, следующей за *f*. Возвращение
7. *a, b, c*	Аналогично предыдущему. Возвращение
8. *a, b*	Добавляем вершину *e*
9. *a, b, e*	Добавляем вершину *c*
10. *a, b, e, c*	Добавляем вершину *d*
11. *a, b, e, c, d*	Добавляем вершину *f*
12. <u>*a, b, e, c, d, f*</u>	Гамильтонова цепь. Дуга (*f, a*) дает гамильтонов цикл. Возвращение
13. *a, b, e, c, d*	Возвращение
14. *a, b, e, c*	Возвращение
15. *a, b, e*	Добавляем вершину *d*
16. *a, b, e, d*	Добавляем вершину *f*
17. *a, b, e, d, f*	Добавляем вершину *c*
18. <u>*a, b, e, d, f, c*</u>	Гамильтонова цепь. Цепь замыкается дугой (*c, a*). Возвращение
19. *a, b, e, d, f*	Возвращение
20. *a, b, e, d*	Возвращение
21. *a, b, e*	Возвращение
22. *a, b*	Возвращение
23. *a*	Возвращение
24. ∅	Конец поиска

Основной метод перебора Робертса и Флореса может быть значительно улучшен по быстродействию, если ввести в первоначальный алгоритм проверку двух дополнительных условий [1].

Проверка этих условий будет, конечно, замедлять итеративную процедуру, и для небольших графов (менее, чем с 20 вершинами) не получается никакого улучшения первоначального алгоритма Робертса и Флореса. Но для больших графов эта проверка приводит к заметному сокращению необходимого времени вычислений, уменьшая его в два или более раз.

Литература

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир,1978.

2. Берж К. Теория графов и ее применение. М.: Мир, 1962.

3. Roberts S.M., Flores B. Fn engineering approach to the travelling salesman problem // Man. Sci. 1967. № 13. P. 269.

4. Roberts S.M., Flores B. Systematic generation of Hamiltonian circuits // Comm. Of ACM. 1966. № 9. P. 690.

5. Danielson G.H. On finding the simple paths and circuits in a graph // IREE Trans. CT-15. 1968. P. 294.

6. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977.

7. Pósa L. A theorem concerning Hamilton lines // Magyar Tnd. Akad. Mt. Kutató Int. Közl. 1962. № 7. P. 225.

8. Nash-Williams, C. St. J. A. On Hamiltonian circuits in finite graphs // Proc. American Mathematical Soc. 1966. № 17. P. 466.
9. Ore O. Theory of Graphs // American Mathematical Society. 1962. Vol. XXXVIII.
10. Dhawan V. Hamiltonian circuits and related problems in graph theory. London: Imperial College, 1969.