

Научная статья

УДК 371.315; DOI: 10.61260/1998-8990-2024-2-20-33

## **РАЗРАБОТКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИН СМЕШАННОГО ТИПА**

**Бабин Николай Николаевич;**

**Кулинкович Алексей Викторович.**

**Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций  
им. профессора М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Россия.**

✉ **Эстрин Эрнест Романович.**

**Российский государственный гидрометеорологический университет,  
Санкт-Петербург, Россия**

✉ ***ernest.estrin@gmail.com***

*Аннотация.* При разрушении тела плотин различного типа актуальными становятся проблемы взаимодействия потоков воды с грунтом из местных материалов и с бетонным основанием плотины, а также развитие фильтрационных процессов в теле плотины. Настоящая модель позволяет описывать как механизм разрушения плотин смешанного типа, так и размыв грунта береговой зоны, например, образовавшийся вследствие волны прорыва, который ведет к катастрофическим последствиям. Для получения практических результатов возникает необходимость упрощения изучаемых процессов. Основная проблема в задачах размыва грунта турбулентным потоком воды заключается в адекватном описании транспорта наносов. Обычно для этих целей используются полуэмпирические формулы, полученные для различных условий (крайне редко указанных) и дающие очень различающиеся результаты. В настоящей работе для описания процессов размыва грунта использована теория придонного слоя, позволяющая вывести формулу расхода наносов теоретическим путем. Предлагаемая модель объединяет подходы, развитые в известных моделях теории сплошных сред и гидравлики.

*Ключевые слова:* разрушение тела плотин, взаимодействие потоков воды с грунтом, физико-математическая модель, транспорт наносов, теория придонного слоя

**Для цитирования:** Бабин Н.Н., Кулинкович А.В., Эстрин Э.Р. Разработка физико-математической модели разрушения плотин смешанного типа // Проблемы управления рисками в техносфере. 2024. № 2 (70). С. 20–33. DOI: 10.61260/1998-8990-2024-2-20-33.

Scientific article

## **DEVELOPMENT OF A PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODEL FOR THE DESTRUCTION OF MIXED-TYPE DAMS**

**Babin Nikolaj N.;**

**Kulinkovich Aleksey V.**

**The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg state university of telecommunications,  
Saint-Petersburg, Russia.**

✉ **Estrin Ernest R.**

**Russian state hydrometeorological university, Saint-Petersburg, Russia**

✉ ***ernest.estrin@gmail.com***

*Abstract.* When the body of dams of various types is destroyed, the problems of interaction of water flows with soil from local materials and with the concrete base of the dam, as well as the development of filtration processes in the body of the dam, become relevant. This model allows us to describe both the mechanism of failure of mixed-type dams and the erosion of soil

in the coastal zone, for example, formed as a result of a breakthrough wave, which leads to catastrophic consequences. To obtain practical results, there is a need to simplify the processes being studied. The main problem in problems of soil erosion by turbulent water flow is an adequate description of sediment transport. Typically, for these purposes, semi-empirical formulas are used, obtained for various conditions (extremely rarely specified) and giving very different results. In this work, to describe the processes of soil erosion, the theory of the bottom layer is used, which makes it possible to derive a formula for sediment consumption theoretically. The proposed model combines approaches developed in well-known models of continuum theory and hydraulics.

*Keywords:* destruction of the dam body, interaction of water flows with soil, physical and mathematical model, sediment transport, theory of the bottom layer

**For citation:** Babin N.N., Kulinkovich A.V., Estrin E.R. Development of a physical and mathematical model for the destruction of mixed-type dams // Problemy upravleniya riskami v tekhnosfere = Problems of risk management in the technosphere. 2024. № 2 (70). P. 20–33. DOI: 10.61260/1998-8990-2024-2-20-33.

## Введение

При разрушении тела плотин различного типа актуальными становятся проблемы взаимодействия потоков воды с грунтом из местных материалов и с бетонным основанием плотины, а также развитие фильтрационных процессов в теле плотины.

Для плотин смешанного типа (бетонное основание с боковыми стенками из местных материалов) характерно изменение плотности материала – при размыве потоком либо за счет внутренней суффозии.

Исследования физико-математической модели показывают, что происходит размыв основания бетонной плотины и фильтрация в теле плотин из местных материалов. Фильтрация, как правило, приводит вследствие суффозии к образованию прорана на границе между бетонной русловой и боковыми плотинами из местных материалов.

Настоящая модель позволяет описывать как механизм разрушения плотин смешанного типа, так и размыв грунта береговой зоны, например, образовавшийся вследствие волны прорыва, который ведет к катастрофическим последствиям.

Сложность процессов размыва грунта и фильтрации в плотине исключает описание механизма их протекания средствами математики без значительной идеализации [1–4]. Для получения практических результатов возникает необходимость упрощения изучаемых процессов. Основная проблема в задачах размыва грунта турбулентным потоком воды заключается в адекватном описании транспорта наносов [5–9]. Обычно для этих целей используются полуэмпирические формулы, полученные для различных условий и дающие очень различающиеся результаты. В настоящей работе для описания процессов размыва грунта использована теория придонного слоя, позволяющая вывести формулу расхода наносов теоретическим путем.

### Методы исследования и выбор исходной трехмерной математической модели для описания эволюции турбулентной смеси воды и твердых частиц

В качестве исходной будем рассматривать следующую систему уравнений [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho'_i u_i'' + (1 - \rho'_i) v_i''] = 0; \\ \frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial D' v_{x_i}''}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial D' v_{x_i}''}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - D g_i; \quad i, \alpha = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  – время, а  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$  – прямоугольная декартова система координат ( $x, y$  – плановые горизонтальные координаты, ось  $z$  – направлена вертикально вверх).

Тогда  $D'$  – плотность двухфазного потока:

$$D' = \rho_2 \rho'_1 + \rho_0 (1 - \rho'_1),$$

где  $\rho_2, \rho_0$  – плотность твердых частиц (частиц грунта) и плотность воды соответственно;  $\rho'_1$  – относительный объем твердых частиц в потоке;

$$\vec{v}' = [\rho_2 \rho'_1 \vec{u}'' + \rho_0 (1 - \rho'_1) \vec{v}''] / D', \quad (2)$$

где  $\vec{u}'' (u''_1, u''_2, u''_3), \vec{v}'' (v''_1, v''_2, v''_3)$  – скорости твердой и жидкой фаз соответственно:

$$u''_i = v''_i - \phi_\alpha \delta_{i\alpha}, \quad (3)$$

где  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  – функции, учитывающие отличие вектора скорости воды от вектора скорости твердых частиц;  $\delta_{i\alpha}$  – суммарный тензор вязких и турбулентных напряжений.

$$\psi_\alpha = \rho'_1 (1 - \rho'_1) \phi_\alpha / D'; \quad (4)$$

$$P_{i\alpha} = \rho_2 \rho'_1 v''_\alpha + \rho_0 (1 - \rho'_1) u''_i u''_\alpha, \quad (5)$$

где  $P$  – гидродинамическое давление.

Подставляя (3) в (1), с учетом (4) и (5), получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial v'_{x_i}}{\partial x_i} + (\rho_2 - \rho_0) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial D' v'_{x_i}}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial D' v'_{x_i}}{\partial t} + \frac{\partial D' v'_{x_i} v'_{x_\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - g_i D + \frac{\partial \delta_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \rho_2 \rho_0 \frac{\partial \phi_i \psi_\alpha}{\partial x_\alpha}, i, \alpha = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) описывает эволюцию трехмерного потока смеси воды и твердых частиц.

### Основные положения и формулировка граничных условий с учетом обмена твердыми частицами между потоком и руслом

Для расчета гидродинамических параметров прибрежных течений используются математические модели, в которых искомые величины усредняются по глубине, другими словами, используются двумерные (плановые) уравнения. Для получения плановых уравнений для обоих движущихся потоков – основного потока (поток) и придонного течения (придонный слой) необходимо проинтегрировать исходную трехмерную систему с учетом граничных условий, поставленных на границах между слоями.

Граничные условия для рассматриваемой трехслойной модели запишем для общего случая массообмена между слоями с учетом результатов работ [6, 7, 10–14].

1. На свободной поверхности потока:

$$F_2(x, y, z, t) = z - f_2(x, y, t) = 0.$$

Кинематическое условие:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_2}{\partial y} - v_z = 0. \quad (7)$$

Динамические условия:

$$P + \tau_{nn} = 0, \tau_{ns} = 0, \quad (8)$$

где  $n, s$  – нормаль и касательная к поверхности соответственно.

2. На границе между основным потоком и придонным слоем:

$$F_1(x, y, z, t) = z - f_1(x, y, t) = 0.$$

Кинематическое условие:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_1}{\partial y} - v_z = q'_g, \quad (9)$$

где  $q'_g$  – объемная интенсивность притока массы через единицу поверхности  $F_1$ .

В качестве динамического условия необходимо сформулировать условие непрерывности давления при переходе через поверхность.

3. На границе между придонным слоем и неподвижным дном:

$$F(x, y, z, t) = z - f(x, y, t) = 0.$$

Эта граница отделяет область неподвижных частиц от пришедших в движение частиц. Запишем кинематическое условие:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} - v_z = -q_g, \quad (10)$$

### **Результаты исследования и вывод двухмерной (плановой) системы уравнений, описывающей разрушение плотины**

При интегрировании системы уравнений (6) в потоке и придонном слое, с учетом поставленных граничных условий (7)–(10), приходим к системе плановых уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_{x_i}}{\partial x_i} + (\rho_2 - \rho_0) \frac{\partial h \psi_{x_i}}{\partial x_i} = q'_g; \\ 2) \frac{\partial}{\partial t} (hD) + \frac{\partial}{\partial x_i} (hD v_{x_i}) = Dq'_g; \\ 3, 4) \frac{\partial}{\partial t} (hD v_{x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (hD v_{x_i} v_{x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (gDh^2/2) + \\ + gDh \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \rho_0 \rho_2 \frac{\partial h \phi_{x_i} \psi_{x_\alpha}}{\partial x_\alpha} = Dv_{x_i} q'_g - T_{x_i}, \quad i = 1, 2; \\ 5) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_1 v_{1x_i}) = q_g - q'_g; \\ 6) \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (h_1 \rho_1 v_{1x_\alpha}) = -\rho_1 \frac{\partial f}{\partial t} + \rho_1 q_g - \rho_1 q'_g; \\ 7, 8) \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \rho_1 v_{1x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (h_1 \rho_1 v_{1x_i} v_{1x_\alpha}) + g \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_1 h_1 h + \rho_1 h_1^2/2) - h = \\ = ghD \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + gh_1 \rho_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\rho_1 v_{1x_i} \frac{\partial f}{\partial t} - \rho_1 v_{1x_i} q'_g + \rho_1 v_{1x_i} q_g - T_{1x_i}, \quad i = 2; \\ \alpha = 1, 2, \end{array} \right.$$

где  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ;  $h$  – глубина потока;  $Dv_{x_i}$  – средние по глубине плотность и скорость потока:

$$D = \rho_2 \rho' + \rho_0 (1 - \rho'),$$

где  $\rho'$  – средняя по глубине концентрация твердых частиц в потоке;

$$\psi_{x_i} = \rho' (1 - \rho') \phi_{x_i} / D;$$

где  $h_1$  – толщина придонного слоя;  $\rho_1$ ,  $v_{1x_i}$  – средние по толщине плотность и скорости придонного слоя:

$$\rho_1 = \rho_2 \rho + \rho_0 (1 - \rho), \tag{11}$$

где  $\rho$  – средняя по толщине концентрация твердых частиц в придонном слое;  $T_{x_i}$  – величины, учитывающие интегральный эффект диссипативных процессов в потоке;  $T_{1x_i}$  – величины, учитывающие интегральный эффект диссипативных процессов в придонном слое.

Для получения связи между толщиной придонного слоя и гидродинамическими параметрами потока в случае размыва грунта берега используем метод, предложенный Т.Г. Войнич-Сяноженцким [14–17]. Рассмотрим участок придонного слоя, толщину которого обозначим через  $h_H$ , ограниченный снизу областью со значением концентрации грунта неподвижного слоя  $(1 - m)$ , где  $m$  – пористость грунта. В результате турбулентных процессов в придонной части потока образуются восходящие и нисходящие вихри с противоположно направленными, но равными по абсолютной величине скоростями, причем имеют место следующие соотношения:

$$v_B^* = v_H^* = v_* = \frac{\sqrt{g}}{c} V,$$

где  $v_B^*$ ,  $v_H^*$  – скорости восходящих и нисходящих вихрей, соответственно;  $c$  – коэффициент Шези;

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Эти вихри переносят в выделенный объем как массу частиц грунта, так и количество движения. Нисходящие вихри в единицу времени переносят количество движения, равное:

$$q_H = \rho_2 \rho' \omega' S (v_H^* - \omega_0)^2 \text{sign}(v_H^*),$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения объема от неподвижного дна до придонного слоя;  $\omega' S$  – часть площади поперечного сечения, занятой нисходящими вихрями;  $\omega_0$  – гидравлическая крупность частиц грунта;  $\text{sign}(v_H^*)$  – функция, совпадающая со знаком направления скорости. Имеем:

$$\rho' = \rho(v_* - \omega_0)/(v_* + \omega_0).$$

За то же время восходящими вихрями переносится количество движения:

$$q_B = q q_2 (1 - \omega') S (v_B^* - \omega_0)^2 \text{sign}(v_B^*),$$

где  $(1 - \omega') S$  – часть площади поперечного сечения, занятого восходящими вихрями.

За это время импульс действующей в придонном слое массовой силы составит величину:

$$F = S g (\rho_2 - \rho_0) \rho h_H S dt \approx g (\rho_2 - \rho_0) \rho h_H S T_H = g (\rho_2 - \rho_0) \rho h_H T_H,$$

где  $T_H$  – рассматриваемый единичный отрезок времени, в течение которого можно пренебречь изменением гидродинамических переменных;  $h_H$  – толщина придонного слоя. Запишем закон сохранения импульса для движущегося участка придонного слоя в виде:

$$\rho_2 \rho' \omega' S (v_* + \omega_0)^2 + \rho_2 \rho_0 (1 - \omega') S (v_* - \omega_0)^2 = g (\rho_2 - \rho_0) \rho h_H S. \quad (12)$$

Из уравнения (12), полагая  $\omega' = 0,5$ , получаем выражение:

$$h_H = \frac{1}{g\sigma} v_* (v_* - \omega_0),$$

где  $\sigma = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2}$  (при отсутствии размыва  $\rho = \rho' + h_H = 0$ ).

Включая в движущийся придонный слой частицы, совершающие «ползучие» движения, получаем с учетом формул (2), (3) окончательное выражение для толщины придонного слоя  $h_1$  ( $h_1$  и  $h_H$  – идентичны, то есть  $h_1 \equiv h_H$ ):

$$h_1 = \frac{v^2}{\sigma c^2} - \frac{\omega_0 v}{\sigma \sqrt{g} c} + d_0,$$

где  $d_0$  – средний диаметр частиц грунта. Определим величины  $q'_g$  и  $q_g$ , описывающие процессы обмена частицами грунта между слоями. Для переноса частиц через неподвижное дно можно записать вполне очевидное соотношение:

$$q_g = -(1 - m) \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Следуя работам [6, 7], запишем соотношение для переноса частиц грунта через границу между потоком и придонным слоем:

$$q'_g = \frac{1}{L^*} (T_{SC} - T_S),$$

где  $L^*$  – «характеристическая» длина:

$$L^* = \frac{hV}{\omega_0} \cdot \left\{ \frac{h_1}{h} + \left( 1 - \frac{h_1}{h} \right) \exp \left[ -1,5 \cdot \left( \frac{h_1}{h} \right)^{-1/6} \cdot \frac{\omega_0}{v_*} \right] \right\},$$

где  $T_{SC}$  – транспортирующая способность потока;  $T_S$  – насыщение потока наносами:

$$T_S = \rho' \cdot h \cdot V;$$

$$T_{SC} = h \cdot V \cdot S_C,$$

где  $S_C$  – критическая концентрация.

Известен целый ряд формул для оценки величины критической концентрации  $S_C$  Гришанин Г.В. и др. [18] выделяют следующие три формулы:

$$S_C = 6,67 \cdot 10^8 \cdot F_r \cdot \frac{v_*}{\omega_0} \cdot \frac{c}{\sqrt{g}};$$

$$S_C = 9,2 \cdot 10^5 \cdot F_r \cdot \left( \frac{v_*}{\omega_0} \right)^{0,75} \cdot \left( \frac{c}{\sqrt{g}} + 27 \right) \left( \frac{c}{\sqrt{g}} \right)^{1,75};$$

$$S_C = 0,006 \cdot F_r \cdot \left( \frac{v_*}{\omega_0} \right)^2 \cdot \left( \frac{c}{\sqrt{g}} \right)^2 \frac{gd_0}{\omega_0^2} \left( \frac{d_0}{h} \right)^{0,6};$$

$$F_r = \frac{v^2}{gh'}.$$

С учетом вышеизложенного, приходим к общей физико-математической модели разрушения плотин смешанного типа:

$$\begin{aligned} & 1) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_{x_i}}{\partial x_i} + (\rho_2 - \rho_0) \frac{\partial h \psi_{x_i}}{\partial x_i} - \frac{T_{SC} - T_S}{L^*} = 0; \\ & 2) \frac{\partial}{\partial t} (hD) + \frac{\partial}{\partial x_i} (hD v_{x_i}) - \frac{D}{L^*} (T_{SC} - T_S) = 0; \\ & 3, 4) \frac{\partial}{\partial t} (hD v_{x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (hD v_{x_i} v_{x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (gDh^2/2) + \\ & + gDh \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \rho_0 \rho_2 \frac{\partial h \phi_{x_i} \psi_{x_\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{D v_{x_i}}{L^*} (T_{SC} - T_S) = -T_{x_i}, \quad i = 1, 2; \\ & 5) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_1 v_{1x_i}) + (1 - m) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{T_{SC} - T_S}{L^*} = 0; \\ & 6) h_1 = \frac{v^2}{\sigma c^2} - \frac{\omega_0 V}{\sigma \sqrt{g} c} + d_0; \\ & 7) f_1 = f - h_1; \\ & 8) \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_1 \rho_1 v_{1x_i}) + \rho_1 (2 - m) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\rho_1}{T^*} (T_{SC} - T_S) = 0; \\ & 9, 10) \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \rho_1 v_{1x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (h_1 \rho_1 v_{1x_i} v_{1x_\alpha}) + g \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_1 h_1 h + \rho_1 h_1^2/2) - \\ & - ghD \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + gh_1 \rho_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \rho_1 (2 - m) v_{1x_i} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\rho_1 v_{1x_i}}{L^*} (T_{SC} - T_S) = -T_{1x_i}, \quad i = 1, 2; \\ & \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{13}$$

Проанализируем полученную систему уравнений. Система уравнений (13) – замкнутая система из десяти уравнений для десяти неизвестных:

$$h, D, v_x, v_y, h_1, v_{1x}, v_{1y}, f, f_1. \quad (14)$$

Остальные величины, входящие в систему, являются либо известными константами, либо выражаются через перечисленные искомые функции.

Граничные условия для системы уравнений (13) следует задавать следующим образом. В начальном створе задаются скорости потока и придонного слоя, а в конечном – глубины слоев. Граничные стороны удобно задавать таким образом, чтобы в этих створах были известны плотности слоев и отсутствовал процесс размыва. В качестве начальных условий необходимо задать значения искомых функций (14) в начальный момент времени. Первые четыре уравнения системы (13) описывают эволюцию неоднородного потока воды с присутствующим в воде грунтом. Остальные шесть описывают взаимодействие водного потока с телом плотины. Среднее значение концентрации частиц грунта (относительного объема частиц грунта)  $\rho$  в придонном слое можно оценить:

$$\rho = 0,35. \quad (15)$$

Соотношение (15), например, следует использовать вместо уравнения (7) системы (13). Анализ баланса сил, действующих в придонном слое, проведенный в работах [19, 20], показывает, что в динамических уравнениях для придонного слоя основную роль играют члены, учитывающие взаимодействие придонного слоя с частицами неподвижного слоя и турбулентное воздействие потока на придонный слой, а также массовую силу. Физико-математическая модель разрушения плотин смешанного типа при взаимодействии потоков воды с грунтом плотины может быть приведена к следующей системе уравнений (для сравнения см. также модели в работах [1, 2, 20]):

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_{x_i}}{\partial x_i} - \frac{T_{SC} - T_S}{L^*} = 0; \\ 2) \frac{\partial}{\partial t} (hD) + \frac{\partial}{\partial x_i} (hD v_{x_i}) - \frac{D}{L^*} (T_{SC} - T_S) = 0; \\ 3, 4) \frac{\partial}{\partial t} (hD v_{x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (hD v_{x_i} v_{x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (gDh^2/2) + \\ \quad + gDh \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \frac{D v_{x_i}}{L^*} (T_{SC} - T_S) = -T_{x_i}, \quad i = 1, 2; \\ 5) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_1 v_{1x_i}) + (1 - m) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{T_{SC} - T_S}{L^*} = 0; \\ 6) h_1 = \frac{V^2}{\sigma c^2} - \frac{\omega_0 V}{\sigma \sqrt{g} c} + d_0; \\ 7) f_1 = f - h_1; \\ 8, 9) g\rho_0 (v_{x_i} - v_{1x_i}) \cdot \sqrt{v_{x_i}^2 - v_{1x_i}^2} - g(\rho_1 - \rho_0) h_1 f_0 \frac{v_{1x_i}}{\sqrt{V_1}} \cdot \\ \quad \cdot \cos \alpha_{x_i} - g h_1 \rho_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2; \\ \alpha = 1, 2. \end{array} \right. \quad (16)$$

где  $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ,  $V_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$ ;  $f_0$  – тангенс угла внутреннего трения частиц грунта;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  – углы между размываемой поверхностью плотины  $f(x, y, t)$  и координатными осями.

Система (16) – замкнутая система из девяти уравнений для девяти неизвестных:

$$h, D, v_x, v_y, h_1, v_{1x}, v_{1y}, f, f_1.$$

Остальные величины, входящие в систему (16), являются либо известными константами, либо выражаются через перечисленные искомые функции. Так, например, плотность придонного слоя находится по соотношению (15) с учетом (11). Граничные условия для системы (16) отличаются от граничных условий для системы (13) отсутствием необходимости задания в граничных створах плотности придонного слоя. Начальные условия очевидны. Проанализируем систему уравнений (16).

Первые четыре уравнения описывают распространение потока в условиях процесса разрушения плотины. Остальные пять уравнений описывают взаимодействие потока с плотиной. Оба взаимозависимых процесса – распространение потока и разрушение плотины – описываются плановыми уравнениями. В уравнениях (7), (8) первый и второй члены левой части учитывают взаимодействие потока на придонный слой и трение придонного слоя о частицы неподвижного слоя.

Покажем, что система уравнений (16), а следовательно, и система уравнений (13) в предельных случаях выходит на известные теоретические и экспериментальные результаты. В случае отсутствия процесса размыва имеем:

$$D = \rho_0, \quad h_1 = 0, \quad v_{1x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для этих условий получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} &= \frac{\partial(f+h_1)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнения (17) следует, что  $f = f(x, y)$ .

Следовательно, система уравнений (16) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_{x_i}}{\partial x_i} = 0; \\ \left( \frac{\partial v_{x_i}}{\partial t} + v_{x_\alpha} \frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_\alpha} + g \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) = - \frac{g v_{x_i}}{c^2 h} \cdot V; \quad i, \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Таким образом, при отсутствии размыва система уравнений (16) переходит в систему уравнений Сен-Венана для однородного потока воды – волны прорыва. Для сопоставления теоретического решения с известными данными рассмотрим условия руслового потока в одномерном приближении. С учетом малости уклона русла динамические уравнения для придонного слоя принимают вид:

$$g\rho_0(v - v_1)^2 - gc^2(\rho_1 - \rho_0)h_1f_0 = 0, \quad (18)$$

где  $v, v_1$  – скорости потока и придонного слоя. Для рассматриваемых условий начала размыва, очевидно, справедливы соотношения:

$$h_1 = d_0; \quad (19)$$

$$v_1 = 0. \quad (20)$$

Соотношение (19) – следствие того факта, что начинают трогаться с места отдельные верхние частицы неподвижного слоя. Объединяя (19) и (20) с уравнением (18), получаем теоретически полученную формулу неразмывающей скорости:

$$v_H = c \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0}} \cdot d_0 f_0. \quad (21)$$

Для получения численного значения неразмывающей скорости для песчаного грунта используем коэффициент Шези в формуле Штриклера:

$$c = 33 \cdot (h/d_0)^{1/6}; \quad h, \text{ м}; \quad d_0, \text{ мм}.$$

При следующих значениях характеристик грунта и воды [15, 18]:

$$\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3; \quad \rho_2 = 2,65 \text{ г/см}^3; \quad f_0 = 0,5 \quad (22)$$

из соотношения (21) находим:

$$v_H = 5,6 \cdot (h/d_0)^{1/6} \cdot \sqrt{d_0}, \text{ м/с}; \quad h, d_0, \text{ м}.$$

Для оценки расхода наносов можно записать:

$$q = \rho_2 \cdot \rho \cdot h_1 \cdot v_1. \quad (23)$$

Далее будет показано, что справедлива приближенная оценка:

$$c^2 \cdot h_1 = \sigma \cdot v^2. \quad (24)$$

Из уравнения (18) выразим скорость придонного слоя:

$$v_1 = v - c \cdot \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_0) h_1 f_0}{\rho_0}},$$

$$v_1 = \left\{ 1 - \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\sigma \rho_0}} \cdot f_0 \right\} \cdot v. \quad (25)$$

Соотношение (23) с учетом (24) и (25) преобразуется к виду:

$$q = \rho_2 \rho \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\sigma \rho_0}} \cdot f_0 \right\} \cdot \frac{v^3}{\sigma c^2}. \quad (26)$$

Для русловых потоков имеет место соотношение:

$$v = c \sqrt{h i}, \quad (27)$$

где  $i$  – уклон русла.

Объединяя соотношения (26) и (27) и учитывая значения характеристик грунта (22), получаем:

$$q = 5 \cdot 10^3 (h/d_0)^{1/6} \cdot (h i)^{3/2}, \text{ кг/с}; \quad h, d_0, \text{ м}.$$

## Выводы

В результате выполненной работы построена физико-математическая модель разрушения плотин смешанного типа при взаимодействии потоков воды с телом плотины. В ходе исследований достигнуты следующие результаты: разработана физическая модель размыва грунта тела плотины; записана исходная трехмерная математическая модель, описывающая эволюцию турбулентной смеси воды и твердых частиц; сформулированы граничные условия для выбранной математической модели, учитывающие обмен частицами грунта между потоком и руслом; выведена двухмерная (плановая) система уравнений, системно описывающая процессы: размыв плотин из местных материалов, размыв основания бетонной плотины и развитие фильтрационных процессов в теле плотины; получена приближенная система уравнений, позволяющая использовать ранее разработанные методы расчета волн прорыва.

### Список источников

1. Розов А.Л. Пути уменьшения ущерба при затоплении речных долин волной прорыва // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2015. № 2. С. 119–125.
2. Разработка физико-математической модели процесса разрушения плотин / А.Л. Розов [и др.] // Актуальные проблемы защиты и безопасности: труды XXV Всерос. науч.-практ. конф. СПб., 2022. С. 234–241.
3. Саинов М.П. Изменение напряженно-деформированного состояния железобетонного экрана каменно-набросной плотины в зависимости от его толщины // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: «Строительство и архитектура». Волгоград, 2019. С. 17–23.
4. Сорока В.Б., Саинов М.П., Королев Д.В. Каменно-набросной плотины с железобетонным экраном: опыт исследований напряженно-деформированного состояния // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 2 (125). С. 207–224.
5. Анискин Н.А., Шайтанов А.М. Строительство, конструкции и инновации плотин из малоцементного бетона // Вестник МГСУ. Т. 15. 2020. № 7. С. 1018–1029.
6. Анискин Н.А., Шайтанов А.М. Математическая модель формирования температурного режима гравитационной плотины из укатанного бетона // Современные проблемы гидравлики и гидротехнического строительства: сб. тезисов докладов V Всерос. науч.-практ. семинара. 2022. С. 64–65.
7. Векслер А.Б., Петров О.А. Расчетное определение связи расходов и уровней воды в нижних бьефах ГЭС при трансформации русла // Гидротехническое строительство. 2019. № 10. С. 42–49.
8. Ходзинская А.Г., Зоммер В.Л. Гидравлические исследования донных регуляционных устройств // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 4 (127). С. 464–472.
9. Чалов Р.С., Камышев А.А. Морфодинамика и гидроморфология речных русел как разделы учения о русловых процессах // Известия российской академии наук. Сер. географическая. 2020. Т. 84. № 6. С. 844–854.
10. Расчет морфометрических характеристик прорана и максимальных расходов при прорывах грунтовых плотин / Т.А. Виноградова [и др.] // Гидросфера. Опасные процессы и явления. 2019. Т. 1. № 2. С. 280–295.
11. Векслер А.Б. Трансформация русла нижних бьефов, ее влияние на условия работы гидроэлектростанции и сооружений гидроузлов // Гидротехническое строительство. 2021. № 9. С. 6–17.
12. Витохин Е.Ю., Цейтлин Б.В., Иванов П.С. Совершенствование методики расчета колебаний в системе «Арочно-гравитационная плотина – основание» при сейсмических воздействиях // Гидротехническое строительство. 2021. № 8. С. 52–59.

13. Моделирование деформаций русел, сложенных мерзлыми породами, при повышении температуры окружающей среды / Е.И. Дебольская [и др.] // Лед и снег. 2013. № 1 (121). С. 104–110.

14. Ковязина И.А., Баяндина Д.С. Факторы формирования стока взвешенных наносов рек и методы его количественной оценки // Развитие географических исследований в Беларуси в XX–XXI веках. Минск: БГУ, 2021. С. 478–483.

15. Вознесенская Н.В. Оценка параметров состояния бетонных плотин в условиях длительной эксплуатации с использованием косвенных измерений // Гидротехническое строительство. 2019. № 3. С. 2–8.

16. Войнич-Сяноженский Т.Г., Покровский Г.И. Анализ причин аварий грунтовых подпорных сооружений водохозяйственных систем комплексного назначения // Водоснабжение и санитарная техника. 2012. № 2. С. 47–52.

17. Ляпичев Ю.Л. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 261–270.

18. Икрамов Н.М., Мажидов Т.Ш. Влияние неоднородности донных наносов на длину и скорость перемещения грядовых форм русла // Современные условия взаимодействия науки и техники. 2017. Ч. 2. С. 60–65.

19. Козлов Д.В. Безопасность и эксплуатационная работоспособность грунтовых плотин на водных объектах московского региона // Гидротехника. 2021. № 1 (62). С. 56–59.

20. Марчук А.Н., Марчук И.А. Гидравлика флюида – сенсор изменений поля напряжений в основаниях больших плотин // Гидротехническое строительство. 2020. № 3. С. 28–31.

## References

1. Rozov A.L. Puti umen'sheniya ushcherba pri zatoplenii rechnyh dolin volnoj proryva // Problemy bezopasnosti i chrezvychajnyh situacij. 2015. № 2. S. 119–125.

2. Razrabotka fiziko-matematicheskoy modeli processa razrusheniya plotin / A.L. Rozov [i dr.] // Aktual'nye problemy zashchity i bezopasnosti: tr. XXV Vseros. nauch.-prakt. konf. SPb., 2022. S. 234–241.

3. Sainov M.P. Izmenenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zhelezobetonnoego ekrana kamЕННО-nabrosnoj plotiny v zavisimosti ot ego tolshchiny // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: «Stroitel'stvo i arhitektura». Volgograd, 2019. S. 17–23.

4. Soroka V.B., Sainov M.P., Korolev D.V. KamЕННО-nabrosnoj plotiny s zhelezobetonnyim ekranom: opyt issledovaniy napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya // Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 2 (125). S. 207–224.

5. Aniskin N.A., Shajtanov A.M. Stroitel'stvo, konstrukcii i innovacii plotin iz malocementnogo betona // Vestnik MGSU. T. 15. 2020. № 7. S. 1018–1029.

6. Aniskin N.A., Shajtanov A.M. Matematicheskaya model' formirovaniya temperaturnogo rezhima gravitacionnoj plotiny iz ukatannogo betona // Sovremennye problemy gidravliki i gidrotekhnicheskogo stroitel'stva: sb. tezisov dokladov V Vseros. nauch.-prakt. seminaru. 2022. S. 64–65.

7. Veksler A.B., Petrov O.A. Raschetnoe opredelenie svyazi raskhodov i urovnej vody v nizhnih b'efah GES pri transformacii rusla // Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo. 2019. № 10. S. 42–49.

8. Hodzinskaya A.G., Zommer V.L. Gidravlicheskie issledovaniya donnyh regulyacionnyh ustrojstv // Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 4 (127). S. 464–472.

9. Chalov R.S., Kamyshev A.A. Morfodinamika i gidromorfologiya rechnyh rusel kak razdely ucheniya o ruslovyh processah // Izvestiya rossijskoj akademii nauk. Ser. geograficheskaya. 2020. T. 84. № 6. S. 844–854.

10. Raschet morfometricheskikh harakteristik prorana i maksimal'nykh raskhodov pri proryvah gruntovykh plotin / T.A. Vinogradova [i dr.] // *Gidrosfera. Opasnye process i yavleniya*. 2019. T. 1. № 2. S. 280–295.
11. Veksler A.B. Transformaciya rusla nizhnih b'efov, ee vliyanie na usloviya raboty gidroelektrostantsii i sooruzhenij gidrouzlov // *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo*. 2021. № 9. S. 6–17.
12. Vitohin E.Yu., Cejtin B.V., Ivanov P.S. Sovershenstvovanie metodiki rascheta kolebanij v sisteme «Arochno-gravitacionnaya plotina – osnovanie» pri sejsmicheskikh vozdeystviyah // *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo*. 2021. № 8. S. 52–59.
13. Modelirovanie deformatsij rusel, slozhennykh merzlymi porodami, pri povyshenii temperatury okruzhayushchej sredy / E.I. Debol'skaya [i dr.] // *Led i sneg*. 2013. № 1 (121). S. 104–110.
14. Kovyazina I.A., Bayandina D.S. Faktory formirovaniya stoka vzveshennykh nanosov rek i metody ego kolichestvennoj ocenki // *Razvitie geograficheskikh issledovanij v Belarusi v XX–XXI vekah*. Minsk: BGU, 2021. S. 478–483.
15. Voznesenskaya N.V. Ocenka parametrov sostoyaniya betonnykh plotin v usloviyah dlitel'noj ekspluatatsii s ispol'zovaniem kosvennykh izmerenij // *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo*. 2019. № 3. S. 2–8.
16. Vojnich-Syanozhenskij T.G., Pokrovskij G.I. Analiz prichin avarij gruntovykh podpornykh sooruzhenij vodohozhaystvennykh sistem kompleksnogo naznacheniya // *Vodosnabzhenie i sanitarnaya tekhnika*. 2012. № 2. S. 47–52.
17. Lyapichev Yu.L. Vybor matematicheskikh modelej gruntov v staticheskikh i sejsmicheskikh raschetah gruntovykh plotin // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*. 2020. T. 16. № 4. S. 261–270.
18. Ikramov N.M., Mazhidov T.Sh. Vliyanie neodnorodnosti donnykh nanosov na dlinu i skorost' peremeshcheniya gryadovykh form rusla // *Sovremennye usloviya vzaimodeystviya nauki i tekhniki*. 2017. Ch. 2. S. 60–65.
19. Kozlov D.V. Bezopasnost' i ekspluatacionnaya rabotosposobnost' gruntovykh plotin na vodnykh ob'ektah moskovskogo regiona // *Gidrotekhnika*. 2021. № 1 (62). S. 56–59.
20. Marchuk A.N., Marchuk I.A. Gidravlika flyuida – sensor izmenenij polya napryazhenij v osnovaniyah bol'shih plotin // *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo*. 2020. № 3. S. 28–31.

**Информация о статье:**

Статья поступила в редакцию: 22.01.2024; одобрена после рецензирования: 16.04.2024;  
принята к публикации: 18.04.2024

**The information about article:**

The article was submitted to the editorial office: 22.01.2024; approved after review: 16.04.2024;  
accepted for publication: 18.04.2024

*Информация об авторах:*

**Бабин Николай Николаевич**, доцент кафедры экологической безопасности Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича (193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, д. 22, корп. 1), кандидат военных наук, e-mail: babin-nvk@yandex.ru, SPIN-код: 2825-6233

**Куликович Алексей Викторович**, доцент кафедры экологической безопасности Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича (193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, д. 22, корп. 1), кандидат химических наук, доцент, e-mail: geochem@mail.ru, SPIN-код: 9909-5911

**Эстрин Эрнест Романович**, доцент кафедры водных биоресурсов, аквакультуры и гидрохимии Российского государственного гидрометеорологического университета (192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79), кандидат педагогических наук, доцент, e-mail: ernest.estrin@gmail.com, SPIN-код: 9774-5631

*Information about the authors:*

**Babin Nikolay N.**, associate professor of the department of environmental safety of Saint-Petersburg state university of telecommunications named after prof. M.A. Bonch-Bruevich (193232, Saint-Petersburg, Bolshevnikov ave., 22, building. 1), candidate of military sciences, e-mail: babin-nvk@yandex.ru, SPIN: 2825-6233

**Kulinkovich Alexey V.**, associate professor of the department of environmental safety of Saint-Petersburg state university of telecommunications named after prof. M.A. Bonch-Bruevich (193232, Saint-Petersburg, Bolshevnikov ave., 22, building. 1), candidate of chemical sciences, associate professor, e-mail: geochem@mail.ru, SPIN: 9909-5911

**Estrin Ernest R.**, associate professor of the department of aquatic bioresources, aquaculture and hydrochemistry of the Russian state hydrometeorological university (192007, Saint-Petersburg, Voronezhskaya str., 79), candidate of pedagogical sciences, associate professor, e-mail: ernest.estrin@gmail.com, SPIN: 9774-5631