

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ БАЗОВОГО ШАССИ ПОЖАРНО-СПАСАТЕЛЬНОГО АВТОМОБИЛЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ДОРОГАМ

**К.С. Иванов, кандидат технических наук, доцент;**

**А.В. Широухов.**

**Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России**

Рассмотрены колебания базового шасси пожарно-спасательного автомобиля, вызываемые неровностями дороги и оказывающие значительное влияние на его эксплуатационные качества: прежде всего на скорость движения и плавность хода. Динамические системы автомобиля рассматриваются как эквивалентные колебательные системы, и анализ динамических нагрузок проводится на основе систем дифференциальных уравнений, позволяющих исследовать динамические нагрузки различных типов пожарных автомобилей, смонтированных на двухосных, трехосных и многоопорных моторно-ходовых базах.

*Ключевые слова:* пожарно-спасательный автомобиль, колебательная система, неподрессоренная масса, дифференциальное уравнение колебаний, коэффициент упругого сопротивления

## DIFFERENTIAL EQUATION OF OSCILLATION OF THE ELEMENTS OF THE BASE CHASSIS FIRE-RESCUE VEHICLE WHEN DRIVING ON THE ROADS

K.S. Ivanov; A.V. Shiroukhov.

Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

The article deals with the fluctuations of the fire-rescue vehicle caused by road irregularities and significant impact on its performance: primarily on speed and smoothness. Dynamic vehicle system are treated as equivalent to the oscillating system, and the analysis of dynamic loads is based on systems of differential equations, allowing to investigate the dynamic loads of different types of fire-fighting vehicles, mounted on a 2-axial, 3-axial, and multisupport motor-running the bases.

*Keywords:* fire-rescue vehicle, oscillatory system, unsprung mass, differential equation of oscillation, coefficient of elastic resistance

Математическое моделирование исследуемых динамических систем может проводиться на основе систем дифференциальных уравнений. При исследовании колебаний динамические системы пожарно-спасательных автомобилей (ПСА) удобно рассматривать как эквивалентные колебательные системы. В общем случае колебательная система включает в себя несколько масс – поддрессоренных и неподрессоренных частей, связанных между собой упругими и демпфирующими связями.

Поддрессоренной частью являются все элементы автомобиля, вес которых передается рессорам (упругим устройствам подвески). Элементы, вес которых не передается через упругие устройства подвески, являются неподрессоренными элементами автомобиля. Таким образом, поддрессоренными элементами автомобиля являются кузов и рама с укрепленными на ней механизмами и оборудованием, а неподрессоренными – колеса в сборе с осями (мостами).

Массы упругих элементов, рычагов направляющих устройств, амортизаторов, тяг рулевого привода и карданного вала относят частично к массе поддрессоренных, а частично

к массе непрорессоренных частей. Обычно массу этих частей условно делят между прорессоренной и непрорессоренными частями пополам.

Колесательная система, эквивалентная базовому шасси ПСА, специальное оборудование которого смонтировано на базовых машинах с колесными формулами 4x2 или 4x4, представлена на рис. 1. Подобные схемы имеют многие базовые шасси ПСА.

Прорессоренная масса  $M$  и непрорессоренные массы  $m_1$ ,  $m_2$  связаны упругими элементами (рессорами) с жесткостью  $2c_p$  и амортизаторами с коэффициентом сопротивления  $2k_p$  (характеризующим гасящее устройство подвески).

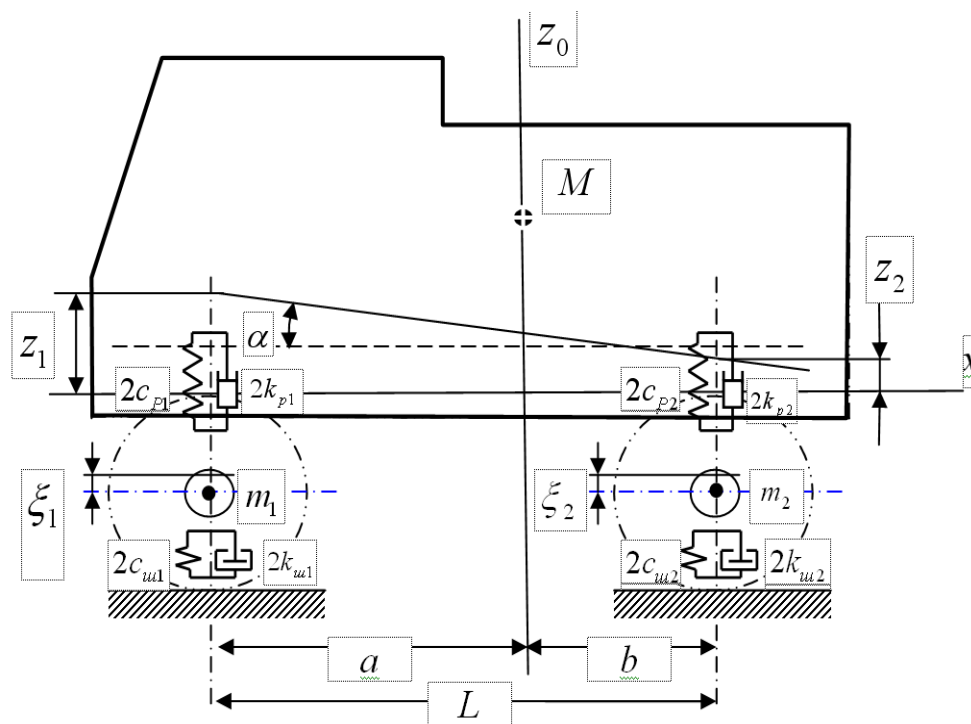
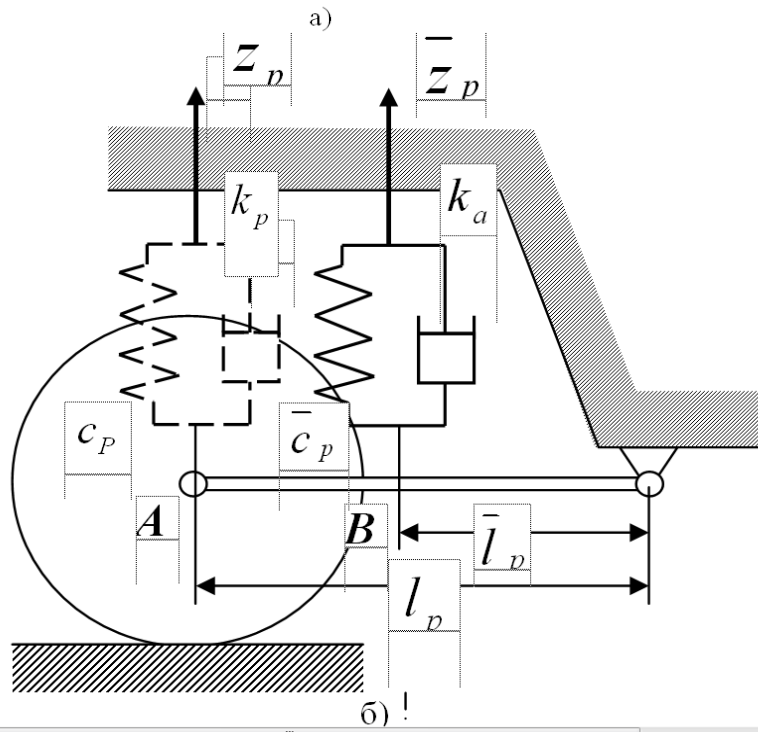
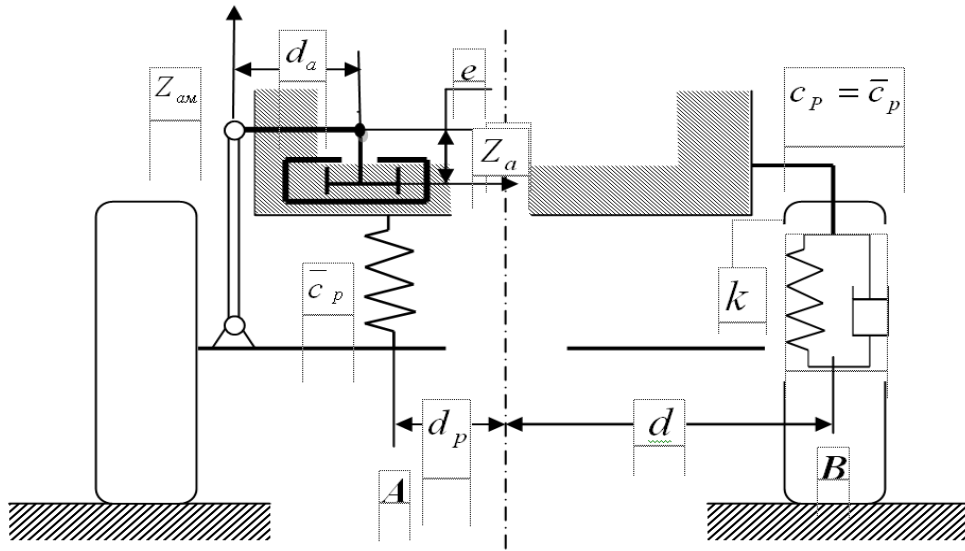


Рис. 1. Колесательная система, эквивалентная пожарному автомобилю

$M$  – прорессоренная масса;  $m_1$ ,  $m_2$  – непрорессоренные массы;  $a$  – расстояние от проекции центра масс ПСА до переднего моста;  $b$  – расстояние от проекции центра масс ПСА до заднего моста;  $L$  – база ПСА.

Непрорессоренные массы связаны с дорогой шинами, имеющими жесткость  $2c_w$  и коэффициент неупругого сопротивления  $2k_w$  (характеризующий затухание колебаний в шинах). Жесткость подвески  $c_p$  – величина, приведенная к колее автомобиля, может отличаться от жесткости  $\bar{c}_p$  рессоры (упругого элемента подвески).

На рис. 2 представлены несколько схем подвесок. Для зависимой подвески при рассмотрении вертикальных колебаний (схема а)  $c_p = \bar{c}_p$ ; при независимой однорычажной подвеске (схема б) приведенная жесткость должна быть такой, чтобы момент от приведенного упругого элемента был равен моменту от истинного упругого элемента.



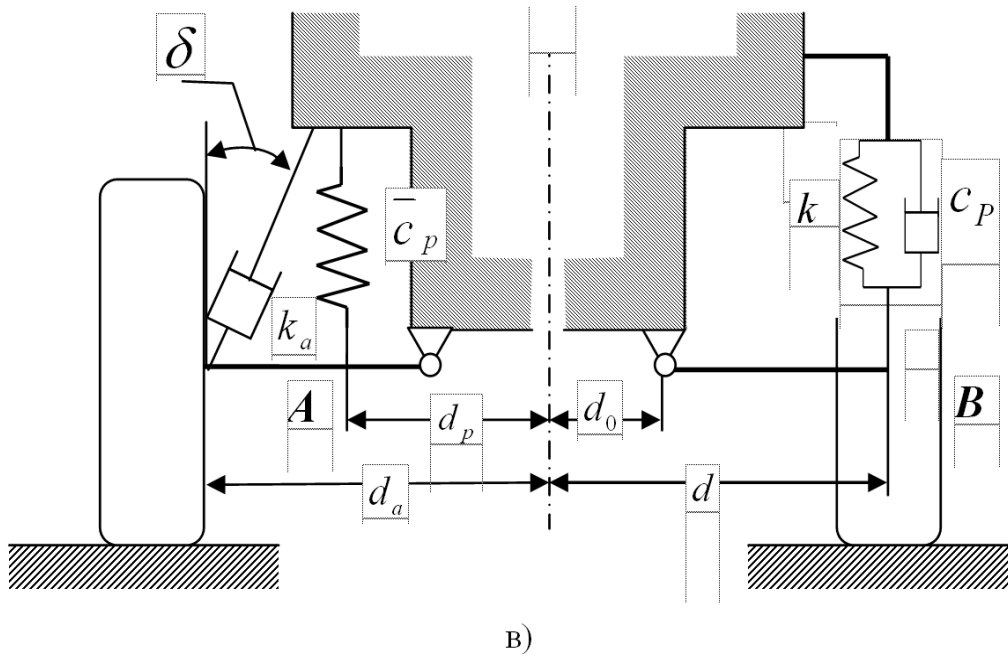


Рис. 2. Схемы подвесок с упругими элементами и амортизаторами

Между перемещениями  $\bar{z}_p$  и  $z_p$  точек  $A$  и  $B$  существует очевидная связь:

$$z_p = \bar{z}_p \frac{l_p}{\bar{l}_p},$$

кроме того:

$$c_p z_p l_p = \bar{c}_p \bar{z}_p \bar{l}_p,$$

тогда:

$$c_p = \bar{c}_p \left( \frac{l_p}{\bar{l}_p} \right)^2.$$

Это выражение применимо для большинства рычажных подвесок. С учетом, например, обозначений схемы в получим:

$$c_p = \bar{c}_p \left( \frac{d_p - d_0}{d - d_0} \right)^2.$$

В общем случае величины  $c_p$  и  $\bar{c}_p$  могут быть в зависимости от деформации упругих элементов переменными. Тогда:

$$\bar{c}_p = \frac{dZ_p}{df_p}; \quad c_p = \frac{dZ}{df},$$

где  $f$  и  $\bar{f}_p$  – деформации упругих элементов;  $Z$  и  $Z_p$  – силы, деформирующие упругие элементы.

Характеристика металлических упругих элементов чаще всего линейна, а характеристика подвески, обусловленная влиянием рычажной связи, обычно нелинейна. При предварительных расчетах, связанных особенно с расчетом колебаний, жесткость  $c_p$  принимают постоянной [1].

Коэффициент сопротивления  $k_p$  условного амортизатора, характеризующего затухание колебаний в подвеске, также может отличаться от коэффициента сопротивления  $k_a$  реального амортизатора. При переходе от коэффициента  $k_a$  к коэффициенту  $k_p$  учитывают имеющуюся рычажную связь аналогично тому, как это делается при замене действительного упругого элемента приведенным. Например, при вертикальных колебаниях сила  $Z_{ам}$  на конце рычага амортизатора (рис. 2а) связана с силой  $Z_a$ , действующей на поршни амортизатора, зависимостью  $Z_{ам} = Z_a \frac{e}{d_a}$ . Полагая сопротивление амортизатора пропорциональным относительной скорости перемещения поршня амортизатора  $Z_a = k_a \dot{f}_{om}$  и учитывая равенство моментов сил  $Z_a$  и  $Z_{ам}$ , перейдем от действительного амортизатора к приведенному (правая часть схемы). Тогда получим:

$$k_p = k_a \left( \frac{e}{d_a} \right)^2 .$$

Для схемы рис. 2б аналогично будем иметь:

$$k_p = k_a \left( \frac{\bar{l}_p}{l_p} \right)^2 .$$

Для схемы рис. 2в коэффициент сопротивления приведенного амортизатора (правая часть схемы) будет равен:

$$k_p = k_a \left( \frac{d_a - d_0}{d - d_0} \right)^2 \text{Cos } \delta .$$

В общем случае коэффициент сопротивления  $k_a = \frac{dZ_a}{d\dot{f}_{om}}$ , то есть равен тангенсу угла наклона касательной, проведенной в рассматриваемой точке к характеристике амортизатора:

$$Z_a = \Phi(\dot{f}_{om}),$$

где  $\dot{f}_{om}$  – относительная скорость перемещения амортизатора.

Колебания кузова в вертикальной продольной плоскости характеризуются поступательным перемещением центра масс  $Z_0$  вдоль вертикальной оси и угловыми колебаниями  $\alpha$  вокруг поперечной оси, оказывают основное влияние на плавность хода ПСА.

Колебания кузова в поперечной плоскости и вдоль продольной оси, влияют в основном на управляемость и устойчивость ПСА при действии боковых сил и не оказывают существенного влияния на динамическую нагруженность поддресоренных масс.

ПСА представляет собой многомассовую колебательную систему.

Поддресоренная масса фактически состоит из нескольких связанных масс: рамы, двигателя и кабины. С поддресоренной массой через упругие элементы сидений связаны массы пассажиров. Поэтому автомобиль следовало бы заменить системой со многими степенями свободы. Однако, исходя из конкретных целей исследования и правильного учета физических особенностей колебаний автомобиля, при инженерных расчетах оказывается возможным свести весьма сложную систему к сравнительно простой (одной или нескольким системам). Большинство задач, связанных с колебаниями ПСА, можно решать, рассматривая ПСА как динамическую систему, состоящую из поддресоренных и неподдресоренных масс, совершающих колебания в вертикальной продольной плоскости. При движении по дорогам максимальные динамические нагрузки действуют на ПСА в вертикальной продольной плоскости, проходящей через центр тяжести поддресоренных масс.

Обобщенные координаты, характеризующие положение поддресоренных и неподдресоренных масс при вертикальных колебаниях, могут быть выбраны по-разному.

Рассмотрим две системы обобщенных координат (рис. 1), где индексы 1 и 2 обозначают соответственно перемещения поддресоренных и неподдресоренных масс, расположенных над передними и задними колесами ПСА:

$$1) z_1, z_2, \xi_1, \xi_2 ;$$

$$2) z_0, \alpha, \xi_1, \xi_2 .$$

Эти системы отличаются тем, что первая описывает колебания поддресоренной части в продольной вертикальной плоскости координатами  $z_1$  и  $z_2$ , а вторая – координатами  $z_0$  и  $\alpha$  (рис. 1). Между координатами  $z_1, z_2$  и  $z_0, \alpha$  существует связь:

$$z_0 = \frac{az_2 + bz_1}{L}; \quad \alpha = \frac{z_2 - z_1}{L}, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояния от проекции центра тяжести поддресоренной части ПСА до переднего и заднего мостов;  $L$  – база ПСА (рис. 1).

Выражения (1) позволяют переходить от одной системы координат к другой. Используя первую систему координат, можно получить систему уравнений, определяющих линейные вертикальные колебания ПСА, при этом вторая система позволяет исследовать его продольные угловые колебания кузова [2].

Составим дифференциальные уравнения движения для колебательной системы, представленной на рис. 1. Принимая, что ПСА движется прямолинейно и равномерно, колебания кузова и колес малы, а характеристики всех элементов подвески линейны (в частности, коэффициенты  $c$  и  $k$  постоянны), а колеса обкатываются по неровностям дороги, сохраняя точечный, но постоянный контакт с ее поверхностью. При этом будем полагать, что возмущающие функции дорог, действующие на правые и левые колеса, одинаковы и симметричны.

Воспользуемся уравнением Лагранжа [3]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $R$  – диссипативная функция, характеризующая рассеивание энергии при действии сил неупругих сопротивлений;  $q_i$  – обобщенная координата.

Кинетическая энергия системы является однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$2T = M(\dot{z}_0^2 + \rho\dot{\alpha}^2) + m\dot{\xi}_1^2 + m_2\dot{\xi}_2^2,$$

где  $\rho_y$  – радиус инерции подрессоренной массы относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести подрессоренных частей.

Чтобы выразить кинетическую энергию через первую систему обобщенных координат, заменим переменные  $Z_0$  и  $\alpha$  с учетом выражений (1).

Тогда получим:

$$2T = M_1\dot{z}_1^2 + M_2\dot{z}_2^2 + 2M_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + m\dot{\xi}_1^2 + m_2\dot{\xi}_2^2,$$

где приведенные массы:

$$M_1 = M \frac{b^2 + \rho_y^2}{L^2}; \quad M_2 = M \frac{a^2 + \rho_y^2}{L^2}; \quad M_3 = M \frac{ab - \rho_y^2}{L^2}. \quad (3)$$

Как будет показано дальше, соотношение между радиусом инерции  $\rho_y$  и координатами центра тяжести имеет существенное значение. Это соотношение оценивается величиной  $\varepsilon_y = \rho_y^2 / ab$ , которая называется коэффициентом распределения масс ПСА [1]. Величина  $\varepsilon_y$  может быть найдена не только для подрессоренной части, как в данном случае, но и для автомобиля в целом.

Выражение для потенциальной энергии будет иметь вид:

$$2\Pi = 2c_{p1}(z_1 - \xi_1)^2 + 2c_{p2}(z_2 - \xi_2)^2 + 2c_{u1}(\xi_1 - q_1)^2 + 2c_{u2}(\xi_2 - q_2)^2. \quad (4)$$

Диссипативная функция может быть выражена следующим образом:

$$2R = 2k_1(\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1)^2 + 2k_2(\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2)^2 + 2k_{u1}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1)^2 + 2k_{u2}(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2)^2. \quad (5)$$

В зависимостях (4) и (5) обозначения приняты в соответствии с рис. 1.

Подставляя выражения для  $T$ ,  $\Pi$ ,  $R$  в уравнение Лагранжа (2), получим дифференциальные уравнения, описывающие колебания пожарного автомобиля:

$$\left. \begin{aligned}
M_1 \ddot{z}_1 + 2k_1 \dot{z}_1 + 2c_{p1} z_1 + M_3 \ddot{z}_2 - 2k_1 \dot{\xi}_1 - 2c_{p1} \xi_1 &= 0; \\
M_2 \ddot{z}_2 + 2k_2 \dot{z}_2 + 2c_{p2} z_2 + M_3 \ddot{z}_1 - 2k_2 \dot{\xi}_2 - 2c_{p2} \xi_2 &= 0; \\
m_1 \ddot{\xi}_1 + 2(k_1 + k_{u1}) \dot{\xi}_1 + 2(c_{p1} + c_{u1}) \xi_1 - 2k_1 \dot{z}_1 - 2c_{p1} z_1 &= 2k_{1u} \dot{q}_1 + 2c_{1u} q_1; \\
m_2 \ddot{\xi}_2 + 2(k_2 + k_{u2}) \dot{\xi}_2 + 2(c_{p2} + c_{u2}) \xi_2 - 2k_2 \dot{z}_2 - 2c_{p2} z_2 &= 2k_{2u} \dot{q}_2 + 2c_{2u} q_2
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Система дифференциальных уравнений (6) описывает колебания ПСА в продольной вертикальной плоскости по линейным координатам.

Чтобы получить уравнения колебаний для второй системы координат, следует перейти в выражениях для  $\Pi$  и  $R$  от координат  $z_1$  и  $z_2$  к координатам  $z_0, \alpha$  в соответствии с зависимостями:

$$z_1 = z_0 - a\alpha; \quad z_2 = z_0 + b\alpha.$$

При этом вместо системы уравнений (6) получим:

$$\left. \begin{aligned}
M\ddot{z}_0 + 2(k_1 + k_2)\dot{z}_0 + 2(c_{p1} + c_{p2})z_0 - 2(k_1 a - k_2 b)\dot{\alpha} - 2(c_{p1} a - c_{p2} b)\alpha - \\
- 2k_1 \dot{\xi}_1 - 2c_{p1} \xi_1 - 2k_2 \dot{\xi}_2 - 2c_{p2} \xi_2 &= 0; \\
M Q_y \ddot{\alpha} + 2(k_1 a^2 + k_2 b^2)\dot{\alpha} + 2(c_{p1} a^2 + c_{p2} b^2)\alpha - 2(k_1 a - k_2 b)\dot{z}_0 - 2(c_{p1} a + c_{p2} b)z_0 + 2k_1 a \dot{\xi}_1 + \\
+ 2c_{p1} a \xi_1 - 2k_2 b \dot{\xi}_2 - 2c_{p2} b \xi_2 &= 0; \\
m_1 \dot{\xi}_1 + 2(k_1 + k_{u1}) \dot{\xi}_1 + 2(c_{p1} + c_{u1}) \xi_1 - 2k_1 \dot{z}_0 - 2c_{p1} z_0 + 2k_1 a \dot{\alpha} + 2c_{p1} a \alpha &= 2k_{1u} \dot{q}_1 + 2c_{1u} q_1 \\
m_2 \dot{\xi}_2 + 2(k_2 + k_{u2}) \dot{\xi}_2 + 2(c_{p2} + c_{u2}) \xi_2 - 2k_2 \dot{z}_0 - 2c_{p2} z_0 + 2k_2 b \dot{\alpha} + 2c_{p2} b \alpha &= 2k_{2u} \dot{q}_2 + 2c_{2u} q_2
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Системы уравнений (6) и (7) описывают одни и те же колебания пожарного автомобиля в продольной вертикальной плоскости. Существенная для практических целей разница между ними состоит в следующем. Если распределение подрессоренных масс таково, что  $\rho_y^2 = ab$ , то согласно выражениям (3)  $M_3=0$ . Поэтому система уравнений (6) распадается на две. Уравнения с координатами  $z_1$  и  $\xi_1$ , соответствующие колебаниям передней части кузова, перестают быть связанными с уравнениями для координат  $z_2$  и  $\xi_2$ , описывающими колебания задней части кузова. Это дает возможность существенно упростить расчеты. Такое упрощение справедливо во многих случаях [2].

На основе полученных уравнений колебаний ПСА в продольной плоскости можно рассматривать частные случаи, встречающиеся в расчетах.

Дифференциальные уравнения колебаний пожарных автомобилей позволяют на их основе разработать аналитические методики исследования динамических нагрузок ПСА с погрешностями не более 10 %. Эти методики могут использоваться на начальных стадиях проектирования (технического предложения и эскизного проекта) для анализа различных вариантов, разрабатываемых ПСА.



### **Литература**

1. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение, 1972.
2. Иванов К.С., Грачев Е.В. Анализ динамических нагрузок, действующих на пожарные автомобили при движении по дорогам: учеб. пособие. СПб.: С.-Петербург. ин-т ГПС МЧС России. 2005. 37 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: учеб. 9-е изд. СПб.: Лань, 2004. 768 с.