МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ И СРЕДСТВ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ МЧС РОССИИ НА ГАЗОТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ

А.К. Черных, доктор технических наук, доцент.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России.
Д.С. Буданов.
Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, г. Железногорск

Представлен подход к моделированию задачи оптимального распределения сил и средств подразделений Государственной противопожарной службы МЧС России для обеспечения ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций на газотранспортной системе в условиях, когда имеет место дефицит указанных сил и средств. Предложен алгоритм реализации модели оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС России на объекте газотранспортной системы, пострадавшем в результате чрезвычайной ситуации, который имеет универсальный характер, что позволит широкому кругу должностных лиц осуществлять оптимальное распределение ограниченных ресурсов различного вида.

Ключевые слова: распределение сил и средств подразделений МЧС России, математические модели, оптимальное решение модели распределения сил и средств подразделений МЧС России на объекте газотранспортной системы

SIMULATION OF DISTRIBUTION OF FORCES AND MEANS UNITS OF STATE FIRE SERVICE OF EMERCOM OF RUSSIA FOR GAS TRANSPORTATION SYSTEM

A.K. Chernykh. Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia.
D.S. Budanov. Siberian fire and rescue academy of State fire service of EMERCOM of Russia, Zheleznogorsk

The paper presents an approach to modeling the problem of optimal distribution of forces and means of State fire service units of EMERCOM of Russia, to provide disaster relief to the gas transportation system in an environment where there is a shortage of these capabilities. The algorithm implementation of the model of optimal distribution of forces and means of the units of EMERCOM of Russia in the facility's gas transportation system, affected by the emergency, which has a universal character, allowing a wide range of officials to carry out the optimal allocation of scarce resources of various kinds.

Keywords: distribution of forces and resources units of EMERCOM of Russia, mathematical models, optimal solution model the distribution of forces and resources units of EMERCOM of Russia in the facility's gas transportation system

Отметим, что в случае резкого изменения оперативной обстановки, в условиях возникновения чрезвычайной ситуации (ЧС) природного или техногенного характера, в отличие от повседневного режима, когда использование сил и средств подразделений Государственной противопожарной службы МЧС России (сил и средств подразделений МЧС) происходит по разработанным планам и не нуждается в использовании для управления ими математических методов, возможен дефицит этих сил и средств, что требует нахождения оптимальных вариантов их применения, а это уже представляет актуальную математическую задачу, для решения которой надо использовать математическое моделирование.

Приведенное обстоятельство делает весьма актуальным рассмотрение математической задачи оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС на объекте газотранспортной системы (ГТС), на котором для ликвидации последствий ЧС необходимо применение сил и средств МЧС (объект ГТС), для случая, когда имеет место дефицит сил и средств подразделений МЧС.

Отметим, что задачи указанного типа относятся к классу задач распределения неоднородных ресурсов и их решения существенно зависят от предметной области, в рамках которой они реализуются [1–6].

Опыт внедрения методов решения таких задач свидетельствует о том, что применить имеющийся математический аппарат для решения этих задач большинству исследователей, не имеющих фундаментальной математической подготовки, практически невозможно.

Поэтому в статье предложен альтернативный, более простой, подход к решению задачи оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС на объекте ГТС, основанный на декомпозиции этой задачи распределения неоднородных ресурсов на две достаточно простые модели, реализуемые не параллельно, как это принято при традиционных методах выработки решения, а последовательно. В качестве таких моделей, описание которых будет приведено ниже, рассмотрим: разработанную авторами математическую модель оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС по задачам на объекте ГТС, а также математическую модель, реализующую назначение оптимальным образом имеющихся сил и средств подразделений МЧС для выполнения поставленных задач на объекте ГТС [7].

Следует отметить, что одной из причин, предложенной в статье декомпозиции рассматриваемой задачи оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС на объекте ГТС, явилось существование компьютерных приложений Excel и Mathcad, которые предоставляют эффективные способы реализации двух указанных моделей.

Рассмотрим математическую модель оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС по задачам на объекте ГТС. Вербальную постановку указанной модели можно сформулировать следующим образом: распределить имеющиеся силы и средства подразделений МЧС по задачам на объекте ГТС таким образом, чтобы минимизировать степень «недовыполнения» наиболее приоритетных из этих задач.

В качестве основы математической постановки указанной модели предлагается использовать постановку, основанную на подходах модели нелинейного целочисленного программирования, которая имеет вид [1–3, 7]:

$$\min_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{d_i}{x_i} \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = G; \qquad (2)$$

$$b_i \le x_i \le d_i, \ (i = \overline{1,n}); \qquad (3)$$

$$x_i \text{ – целые} \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (4)$$

где x_i – ресурс сил и средств подразделений МЧС, выделяемый для решения *i*-й задачи на объекте ГТС, измеритель; C_i – показатель важности *i*-й задачи на объекте ГТС, число (если $C_i > C_j$, то *i*-я задача является более важной по сравнению с *j*); G – общий ресурс сил и средств подразделений МЧС, выделяемый для решения задач на объекте ГТС, измеритель; d_i – максимальный ресурс сил и средств подразделений МЧС, который требуется для решения *i*-й задачи на объекте ГТС, измеритель; b_i – минимальный ресурс сил и средств подразделений МЧС, который требуется для выполнения *i*-й задачи на объекте ГТС, измеритель; *n* – количество задач на объекте ГТС, распределение ресурса сил и средств подразделений МЧС, между которыми необходимо выполнить одновременно в заданный промежуток времени, шт.

Следует отметить, что в этой модели существенно предполагается однородность распределяемого ресурса, что позволяет не усложнять модель дополнительным определением эффективности выполнения x_i-м ресурсом сил и средств подразделений МЧС *i*-й задачи, а гораздо проще сделать это в рамках второй предлагаемой модели.

Отметим, что в приведенной модели предполагается, что имеет место соотношение $\sum_{i=1}^{n} d_i > G$.

Заметим также, что модель (1–4) можно упростить за счет замены ограничения (3) ограничением $0 \le x_i \le a_i$, где a_i – ресурс сил и средств подразделений МЧС, который требуется для решения *i*-й задачи на объекте ГТС.

Модель (1–4) относится к классу целочисленных моделей нелинейного программирования. В настоящее время для моделей такого класса не существует универсальных алгоритмов их решения.

Наиболее употребительными методами, используемыми при этом, являются различные комбинаторные методы, основанные на упорядоченном переборе допустимых решений с последующим выбором оптимального из них – метод ветвей и границ, отсекающих плоскостей, динамического программирования и т.д. [8–11].

Алгоритм решения математической модели (1–4), предложенный в статье, имеет вид:

Шаг 1. Если $\sum_{i=1}^{n} x_i \le G$, то $x_i = d_i$ $(i = \overline{1,n})$ и переход на шаг 12. Если же $\sum_{i=1}^{n} x_i > G$, то из рассматриваемого множества задач, которые должны быть выполнены на объекте ГТС последовательно удаляем те из них, которые имеют наименьшую важность до тех пор, пока суммарная минимальная потребность в силах и средствах подразделений МЧС для оставшихся задач не станет меньше или равной выделенному ресурсу G.

Шаг 2. Рассматривается модель вида:

$$\min_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} C_i \, {}^{d_i}\!/_{x_i}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^{n} x_i = G$.

Компоненты вектора-решения $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ этой модели определяются следующим образом:

$$x_i^* = G\sqrt{c_i d_i} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{c_j d_j} \,. \tag{5}$$

Шаг 3. Проверка выполнимости ограничительных условий для компонент найденного решения $b_i \le x_i^* \le d_i$ $(i = \overline{1,n})$. Если все компоненты удовлетворяют требуемым ограничениям, то решение модели (1–3) найдено и переход на шаг 9.

Шаг 4. Значения тех x_i^*, которые удовлетворяют условию $x_i^* \le b_i$ полагаем равными b_i и рассматриваем следующую модель:

$$\min_{\{x_i\}} \sum_{i \in N} C_i \, {d_i}/{x_i}$$

при ограничении $\sum_{i \in N} x_i = G - \sum_{i \notin N} b_i$, где $N = \left\{ i : i = 1,2,...n, b_i \le x_i^* \right\}$.

По формуле (5) находим решение этой модели и переход на шаг 3. Если $\forall \ x_i^* \ge b_i$, то переход на шаг 5.

Шаг 5. Для всех задач на объекте ГТС, для которых $i \in N$, корректируем потребности этих задач в силах и средствах подразделений МЧС и соответственно величину общего ресурса сил и средств подразделений МЧС:

$$d_i := d_i - b_i, \ G := G - \sum_{i \in N} b_i . \qquad (6)$$

Шаг 6. Проверка выполнимости условий $x_i^* \le d_i$ ($i \in N$). Если все компоненты вектора-решения удовлетворяют этим ограничениям, то переход на шаг 8.

Шаг 7. Значения тех x_i^*, которые удовлетворяют условию $x_i^* > d_i$, полагаем равными $\mathrm{d_1}$ и рассматриваем следующую модель:

$$\min_{\{x_i\}} \sum_{i \in M} C_i \, {d_i}/{x_i} \text{ при ограничении } \sum_{i \in M} x_i = G - \sum_{i \notin M} d_i ,$$

где $M = \left\{ i : i = 1,2,...\, n, x_i^* \le d_i \right\}$. В соответствии с формулой (5) находим решение этой модели и переход на шаг 6.

Шаг 8. Формируем компоненты вектора-решения модели (1–3):

$$x_i^* := b_i + x_i^* \text{ для } i \in N .$$

Шаг 9. Если все компоненты вектора-решения модели (1–3) – X^* являются целочисленными, то решение исходной модели (1–4) найдено и переход на шаг 12.

Шаг 10. Если в векторе X^* отсутствуют целочисленные компоненты, то переход на шаг 11. Если же у вектора X^* m ($m<n$) целочисленных компонент, то «отсекаем» их и, перенумеровав оставшиеся нецелочисленные компоненты, получаем новый вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, ... x_n^*)$, где значение n пересчитывается в значение (n–m). Значение G в ограничениях модели (1–4) корректируем следующим образом:

$$G := G - \sum_{j \in J} x_j^*, \text{ где } J = \left\{ j : x_j^* - \textit{целые} \right\}. \qquad (7)$$

Шаг 11. Вычисление множества значений $Z_i = c_i d_i / [\, x_i^* \,] - c_i d_i / \left([\, x_i^* \,] + 1 \right)$ ($i = \overline{1,n}$) и выбор $\mathrm{N_1}$ максимальных из них $\mathrm{N_1}$ определяется по формуле:

$$N_1 = G - \sum_{i=1}^{n} [\, x_i^* \,]).$$

Решением исходной модели (1–4) является вектор, включающий «отсеченные» на шаге 10 целочисленные компоненты, а также N_1 компонент, имеющих значение $[x_i^*]+1$ и $(n-N_1)$ компонент со значением $[x_i^*]$.

Шаг 12. Останов.

Первая часть декомпозиции указанной математической задачи на модели выполнена – силы и средства подразделений МЧС, которые в первой модели были определены как однородные, распределены оптимальным образом по задачам на объекте ГТС.

Однако предлагаемый алгоритм, распределяя указанные силы и средства подразделений МЧС, не учитывает специфику их применения для решения задач на объекте ГТС, которая характеризуется отличием степеней эффективности применения сил и средств подразделений МЧС в силу их различной оснащенности специальной техникой.

Указанные недостатки устраняются при использовании модели, реализующей назначение, оптимальным образом, имеющихся сил и средств подразделений МЧС для выполнения поставленных задач.

Приведем математическую постановку указанной модели:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow max \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i=\overline{1,n}), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (j=\overline{1,n}), \tag{10}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1 \text{ для всех } i \text{ и } j, \tag{11}$$

где c_{ij} – эффективность использования *i*-го ресурса сил и средств подразделений МЧС из состава сил и средств подразделений МЧС для выполнения работ на *j*-м объекте ГТС; $x_{ij}=1$ свидетельствует о назначении *i*-го ресурса сил и средств подразделений МЧС из состава сил и средств подразделений МЧС для выполнения работ на *j*-м объекте ГТС.

Сущность решения модели (8–11) заключается в нахождении оптимального, по критерию максимизации эффективности применения, назначения сил и средств подразделений МЧС для выполнения работ в рамках решения задач по ликвидации последствий ЧС на газотранспортной системе.

Следует отметить, что если показатели c_{ij} $\left(\mathrm{i},\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}\right)$ входят в состав аддитивной свертки экономического критерия – минимизации финансовых затрат при назначении сил и средств подразделений МЧС для выполнения поставленных задач, то есть целевая функция модели (8–11) имеет вид $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow min$, то полученная модель представляет стандартный вид модели назначений [7].

Корректность предлагаемого метода решения модели (1–4) вытекает из справедливости следующих, легко доказываемых, утверждений.

Утверждение 1. Существует единственное оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ модели (1), (2), определяемое методом множителей Лагранжа и имеющее вид:

$$x_i^* = G\sqrt{c_i d_i}\Big/\sum_{j=1}^{n}\sqrt{c_j d_j}\,,\ i=\overline{1,n}\,.$$

Утверждение 2. Пусть x_k^* – одна из компонент вектора-решения модели (1), (2) и пусть эта компонента не удовлетворяет условию $x_k^* \le d_k$. Тогда компоненты вектора-решения модели:

$$\sum_{i\in I} C_i \frac{d_i}{x_i} \to min,\ \sum_{i\in I} x_i = G - d_k,$$

где $I = \{i : i \ne k,\, i = 1,2,...n\}$, больше соответствующих компонент вектора-решения модели (1)–(2) для $\forall\ i \in I$.

Утверждение 3. Если в решении модели (1), (2) *k*-я компонента вектора-решения удовлетворяет условию $x_k^* > d_k$, то вектор, доставляющий минимум целевой функции модели (1–3), в качестве *k*-й компоненты должен иметь $x_k^* = d_k$.

Утверждение 4. Пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – решение модели (1–3) и пусть x_k^* – нецелочисленная компонента найденного решения. Тогда $\min\limits_{x_i\in J} F(X)$, где $F(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i d_i / x_i$, $J = \{\, x_i : x_i - целые,\, b_i \le x_i \le d_i \}$, равен значению $min(F(X'), F(X''))$, где $X' = (x_1', x_2', ..., [x_i^*], ..., x_n')$ и $X'' = (x_1'', x_2'', ..., [x_i^*]+1, ..., x_n'')$ – векторы, компоненты которых удовлетворяют условию (2).

Отметим, что здесь и далее через $[x_i^*]$ обозначим целую часть числа x_i^*.

Следствие (из утверждения 4). Значение целевой функции $F(x)$ модели (1–4) по любой *i*-й нецелочисленной компоненте не может быть улучшено на векторах, удовлетворяющих условию (2), а в качестве *i*-й компоненты имеющих значения, отличные от $[x_i^*]$ и $[x_i^*]+1$. Тем самым это означает, что решение модели (1–4) следует искать среди множества значений $[x_i^*]$ и $[x_i^*]+1$ ($i=\overline{1,n}$), удовлетворяющих условию (2).

Утверждение 5. Пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – полностью нецелочисленное решение модели (1–3) и $N_1 = G - \sum_{i=1}^{n}[x_i^*]$. Выберем N_1 наибольших значений из совокупности $z_i = c_i d_i / [x_i^*] - c_i d_i / ([x_i^*]+1)$, $i=\overline{1,n}$. Тогда каждому из выбранных z_i в векторе X^*, являющимся решением модели (1–4), соответствует компонента со значением $[x_i^*]+1$.

Поскольку данное утверждение имеет существенное значение при доказательстве оптимальности предложенного алгоритма, то приведем его доказательство.

Действительно, пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – решение модели (1–3) и пусть при этом все x_i^* нецелочисленные (в противном случае, нецелочисленности переменных можно добиться путем «отбрасывания» целочисленных компонент вектора-решения и соответствующей корректировки балансового условия исходной модели). В соответствии с утверждением 4 в решение исходной модели (1–4) будут входить компоненты $[x_i^*]$ и $[x_i^*]+1$. Поэтому выберем N_1 компонент вектора X^* со значениями $[x_i^*]+1$ таких, что

$z_1 \geq z_2 \geq ... \geq z_{N_1} \geq z_{N_1+1} \geq ... z_n$ (при этом, в случае необходимости, индексы всегда могут быть перенумерованы соответствующим образом).

Докажем теперь, что выбранное таким образом решение исходной целочисленной модели является оптимальным, то есть докажем, что:

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_i d_i \Big/ \big([\, x_i^* \,] + 1 \big) + \sum_{i=N_1+1}^{n} c_i d_i \big/ [\, x_i^* \,] \leq \sum_{i=1, i \neq k}^{N_1} c_i d_i \Big/ \big([\, x_i^* \,] + 1 \big) + c_k d_k \big/ [\, x_i^* \,] + \sum_{i=N_1+1, i \neq l}^{n} c_i d_i \big/ [\, x_i^* \,]$$
$$+ c_l d_l \Big/ \big([\, x_i^* \,] + 1 \big)$$

при $\forall\ k < l$, удовлетворяющих условиям: $1 \leq k \leq N_1$, $N_1 \leq l \leq n$.

Для доказательства этого неравенства необходимо убедиться в справедливости соотношения:

$$c_k d_k \Big/ \big([\, x_k^* \,] + 1 \big) + c_l d_l \big/ [\, x_l^* \,] \leq c_k d_k \big/ [\, x_k^* \,] + c_l d_l \Big/ \big([\, x_l^* \,] + 1 \big)$$

или, что тоже самое,

$$c_k d_k \big/ [\, x_k^* \,] - c_k d_k \Big/ \big([\, x_k^* \,] + 1 \big) \leq c_l d_l \big/ [\, x_l^* \,] - c_l d_l \Big/ \big([\, x_l^* \,] + 1 \big).$$

Справедливость последнего соотношения вытекает из выбора z_k и z_l, что и доказывает утверждение.

Таким образом, в статье приведена декомпозиция задачи оптимального распределения сил и средств подразделений МЧС на объекте ГТС (по задачам ликвидации последствий ЧС), в случае, когда имеет место дефицит указанных сил и средств, на две достаточно простые модели, обе из которых являются оптимизационными и представляют самостоятельный научный интерес. Для первой из этих моделей предложен эффективный, с вычислительной точки зрения, алгоритм, который, обладая свойством универсальности, может применяться для решения задач распределения ограниченного ресурса любой природы.

Отметим, что на основе этого алгоритма разработана компьютерная программа.

Статья может представлять интерес для должностных лиц, занимающихся в рамках повышения эффективности автоматизированных систем управления вопросами оптимального применения сил и средств МЧС, а также для профессорско-преподавательского состава, осуществляющего обучение курсантов университета по математическим дисциплинам.

Литература

1. Примакин А.И., Черных А.К., Яковлева Н.А. Применение методов математического моделирования для оптимизации распределения сил и средств полиции при осложнении оперативной обстановки // Вестник С.-Петерб. ун-та МВД России. 2015. № 2 (66). С. 148–153.

2. Костюк А.В., Черных А.К. Об оптимальном распределении временного ресурса по изучаемым темам // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сб. науч. трудов по материалам Междунар. науч.-практ. конф. Тамбов, 2014. С. 50–51.

3. Черных А.К. Теоретические положения моделирования распределения сил и средств внутренних войск по служебно-боевым задачам // Междисциплинарные исследования в сфере интеграции образования и науки: сб. науч. трудов науч.-пед. состава С.-Петерб. воен. ин-та внутр. войск МВД России. СПб., 2014. С. 151–155.

4. Кукса А.И., Михалевич В.С. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах распределения ресурсов. М.: Наука, 1983.

5. Гупал А.М., Михалевич В.С., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.

6. Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Алгоритм оптимального распределения дискретных неоднородных ресурсов на сети // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 1. С. 54–60.

7. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1.

8. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 2.

9. Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Алгоритм ветвей и границ для одного класса задач теории расписаний // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 32. № 12. С. 2000–2005.

10. Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Модификация метода решения одного класса задач целочисленного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 2. С. 179–183.

11. Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Применение двойственности для повышения эффективности метода ветвей и границ при решении задачи о ранце // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25. № 11. С. 1 666–1 673.