

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОГИБШИХ ПРИ ПОЖАРАХ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ

М.С. Крюкова;

О.Ю. Тарасова, кандидат технических наук, доцент;

А.А. Фоминых.

Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Рассматривается один из подходов исследования динамических рядов с помощью рядов Фурье. Строится тригонометрическая интерполяция динамической модели погибших при пожарах методом наименьших квадратов. Производится оценка статистических характеристик ряда в зависимости от качества прогнозирования.

Ключевые слова: прогнозирование, динамическая модель, ряд Фурье, коэффициент детерминации

RESEARCH OF DYNAMICS OF THE DEAD AT THE FIRES BY MEANS OF FOURIER'S RANKS

M.S. Kryukova; O.Yu. Tarasova; A.A. Fominykh.

Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

Considered one of the approaches to the analysis of time series using Fourier series. Based trigonometric interpolation of the dynamic model killed in fires by the method of least squares. The evaluation of series statistical parameters depending on the quality of forecasting.

Keywords: forecasting, dynamic model, Fourier series, coefficient of determination

Прогнозирование – это обоснованная оценка будущего на основе анализа тенденций развития социальных, экономических и других процессов и их взаимосвязей. Процесс прогнозирования предполагает выявление возможных альтернатив развития в перспективе для обоснованного их выбора и принятия оптимального решения.

Чаще всего используются два способа разработки прогнозов:

– интерполирование и экстраполирование, то есть выявление значений характеристик процесса на основе исследования закономерностей его развития в прошлом и распространения на будущее;

– моделирование, то есть построение моделей с учетом вероятного или желаемого изменения прогнозируемого явления.

Прогнозирование осуществляется на основе различных вариантов подачи информации, которая может носить стохастический характер.

В этом случае нередко используется прогнозирование с применением динамических (временных) рядов.

Динамический ряд представляет собой последовательность числовых значений некоторого изучаемого признака (y) в дискретные моменты времени (t), которую можно представить в виде так называемой трендовой зависимости:

$$\hat{y}_t = f(t).$$

Современная наука обладает достаточно развитым математическим аппаратом прогнозирования динамических рядов. Наилучшие результаты при интерполяции динамических рядов достигаются при использовании разложения в ряд Фурье.

Любая периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье [1], который для простых последовательностей имеет вид:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt,$$

где a_k, b_k – параметры гармонического представления.

Перечислим основные принципы применения анализа Фурье. Исследуемые динамические ряды обычно имеют конечную длину (N). Если интервалы между наблюдениями представляют собой постоянную величину, например, месяц, то самый медленный, то есть самый большой, период косинусоидальной кривой равен длине динамического ряда, то есть N месяцам, что соответствует угловой частоте $\frac{2\pi}{N}$.

Наименьший период этой кривой составляет два месяца, чтобы кривая завершила цикл. Предположим, что N – четное число, то есть $N = 2n$. Угловая частота i -й составляющей равна $\omega_i = \frac{2\pi i}{N}$, где $i = \overline{1, n}$. Если $i = 1$, то $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$, что соответствует самой медленной волне, которую можно наблюдать. При $i = n$ $\omega_n = \pi$, что соответствует самой быстрой волне, которую можно наблюдать [2].

Период (t), за который или по состоянию на который приводятся статистические данные, принимает значения от 0 с постоянным увеличением на $\frac{2\pi}{N}$.

Неизвестные коэффициенты a_k и b_k определяют с помощью метода наименьших квадратов по формулам, аналогичным используемым в регрессионном анализе [3]. Если статистические данные y_t взяты через равные временные интервалы, то параметры ряда Фурье определяются как:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum y_t \cos kt, \quad b_k = \frac{2}{N} \sum y_t \sin kt. \quad (1)$$

Дальнейшее действие заключается в последовательном наращивании числа гармоник и оценке значимости каждой при помощи F -критерия Фишера [4]. Чтобы воспользоваться данным критерием, необходимо предварительно найти значение F -статистики, при вычислении которой используются отклонения фактических значений данных y_t от расчетных \hat{y}_t . Расширение первоначального уравнения с помощью добавления следующих гармоник приводит к тому, что график начинает искривляться и постепенно приближаться к исходным данным. Одна дополнительная гармоника заставляет основную волну изменить наклон, вторая приводит к возникновению нескольких точек перегиба и т.д. Критерием при выборе числа гармоник должен быть паритет остаточной дисперсии S^2 и коэффициента детерминации R^2 .

Коэффициент детерминации R^2 характеризует долю вариации \hat{y}_t , обусловленную соответствующим рядом (долю вариации уровней). При этом доля вариации \hat{y}_t , обусловленная случайным фактором, будет равна $1 - R^2$. Чем ближе R^2 к единице, тем более адекватной является модель динамического ряда.

Покажем эффективность гармонического подхода к динамической модели погибших при пожарах. Анализ статистических данных [5] показывает, что уровни динамического ряда варьируют вокруг среднего значения \bar{y} , при этом эти колебания повторяются (рис. 1).

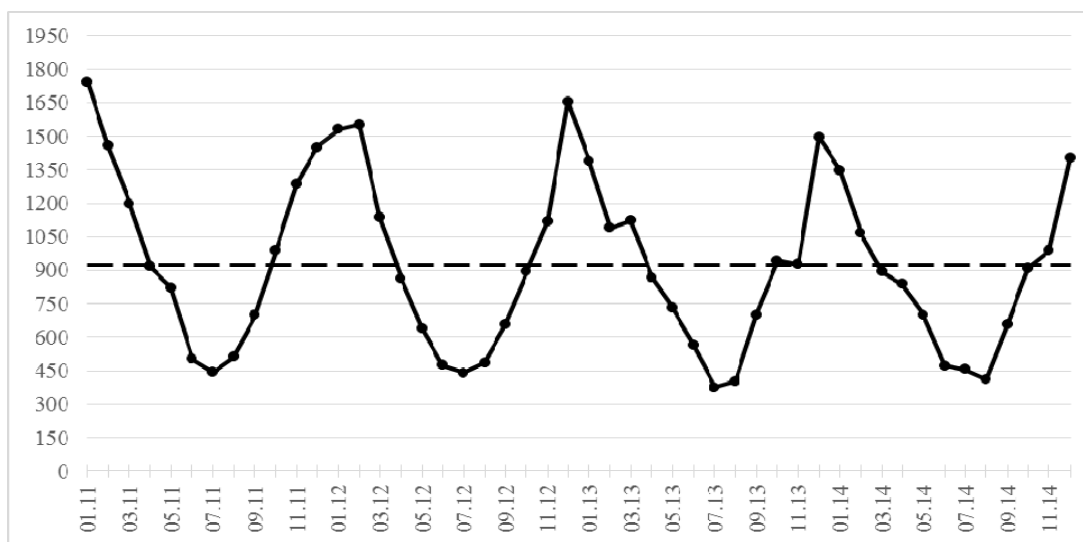


Рис. 1. Динамика количества людей, погибших при пожарах в Российской Федерации

Стационарный периодический динамический ряд, представленный на рис. 1, задается параметрами: периодом (расстояние между пиками или впадинами), амплитудой (отклонение от среднего уровня до пика), фазой (расстояние между началом отсчета и ближайшим пиковым значением) и средним значением.

Воспользуемся формулами (1) для нахождения параметров гармонического представления (табл. 1).

Таблица 1. Периодические составляющие динамического ряда погибших при пожарах

Номер гармоники	a_k	b_k
1	23,576	64,302
2	21,455	25,785
3	16,494	-18,759
4	507,850	-15,784
5	9,329	50,709
6	4,531	16,355

Определяя теоретические значения \hat{y}_t по ряду Фурье, а также остаточную дисперсию S^2 , можно произвести выбор наилучшего гармонического представления. Этой же цели служит и расчет коэффициента детерминации R^2 для уравнений с разным числом гармоник (табл. 2).

Таблица 2. Остаточная дисперсия и коэффициент детерминации по уравнениям с разным числом гармоник

Число гармоник	Остаточная дисперсия S^2	Коэффициент детерминации R^2
1	141 414,77	0,0163
2	140 852,17	0,0202
3	140 540,19	0,0224
4	11 459,94	0,9203
5	10 130,70	0,9295
6	9 986,70	0,9305

Табл. 2 показывает, что уравнение с четырьмя гармониками уже достаточно хорошо описывает исходный динамический ряд, но в качестве модели прогноза возьмем ряд Фурье с шестью гармониками, который объясняет 93 % вариации уровней.

Для гармонического представления тренда значение F -статистики составит 616,18. Значение F -критерия Фишера при 1%-м уровне значимости $F_{кр}(0,01;46;1)$ составляет 7,22, что с высокой степенью уверенности свидетельствует о статистической значимости коэффициента детерминации и подтверждает адекватность построенной динамической модели погибших при пожарах.

Результаты расчетов для гармоники шестого порядка иллюстрирует рис. 2.

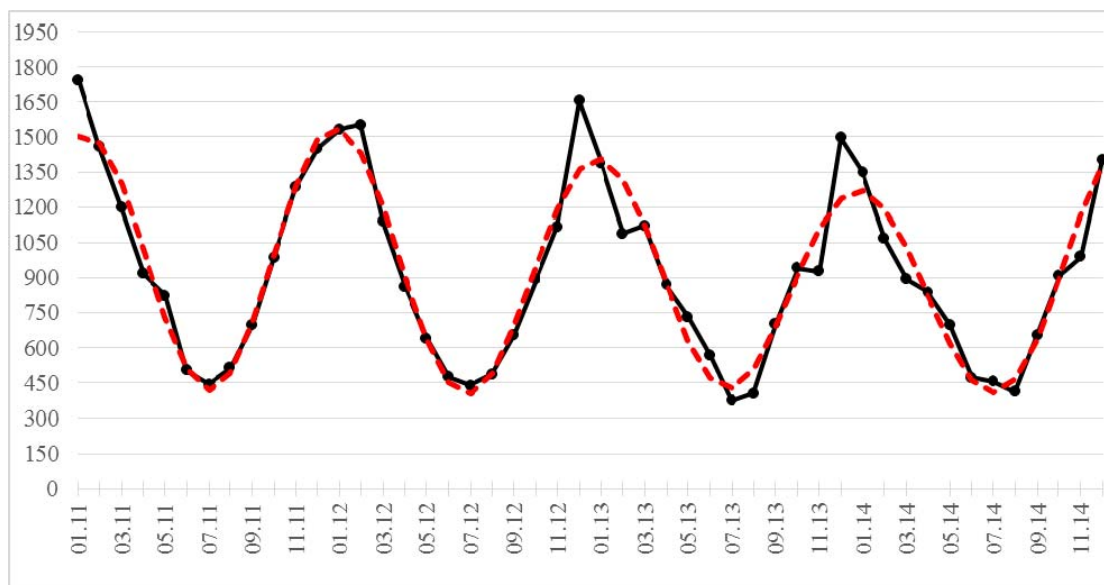


Рис. 2. Динамика количества людей, погибших при пожарах и гармоника Фурье шестого порядка

Прогнозные значения на первые три месяца 2015 г. и доверительные интервалы, в рамках которых возможно их изменение в течение рассматриваемого временного периода, приведены в табл. 3. Прогнозные значения определяются по ряду Фурье с шестью гармониками.

Доверительные интервалы представляют собой интервалы с центром в прогнозных значениях. Истинное число погибших при пожарах с заданной доверительной вероятностью будет находиться в соответствующем доверительном интервале.

Таблица 3. Прогнозные значения погибших при пожарах в Российской Федерации

Месяц	Прогнозные значения	Доверительные интервалы	
		минимальное значение прогноза	максимальное значение прогноза
01.15	1 505	1 219	1 790
02.15	1 473	1 187	1 760
03.15	1 299	1 011	1 586

Число людей, погибших при пожарах в январе 2015 г., предположительно, будет выше уровня предыдущего года. Динамика изменения числовых значений данного показателя за период с 2011 по 2014 гг. и его средние прогнозные значения на 2015 г. приведены на рис. 3. Реальные числовые значения данного показателя по итогам года будут находиться в диапазоне от 1 219 до 1 790 чел.

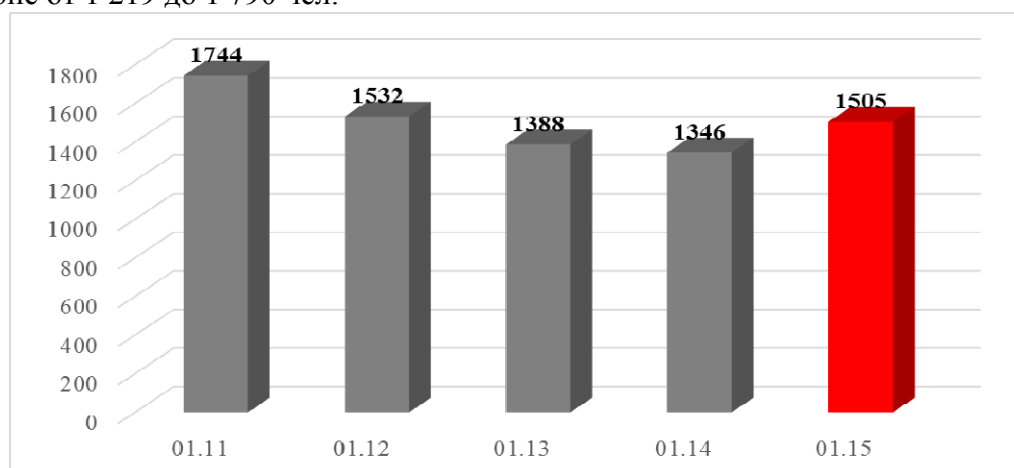


Рис. 3. Количество людей, погибших при пожарах в Российской Федерации

Для построения трендовой модели использован ряд Фурье, параметры которого оценивались с помощью метода наименьших квадратов. Анализ полученных результатов моделирования для конкретного числового примера – количество погибших при пожарах – подтверждает применимость предложенного подхода построения трендовой модели и обеспечивает высокое качество аппроксимации данных и прогнозирования поведения социальной системы. Использование трендовых моделей позволит провести комплекс мероприятий, направленных на разработку эффективных методов для снижения числа пожаров и смягчения их последствий.

Литературы

1. Рудакова Р.П., Букин Л.Л., Гаврилов В.И. Статистика. 2-е изд. СПб.: Питер, 2007.
2. Статистика: учеб. / И.И. Елисеева [и др.]; под ред. И.И. Елисеевой. М.: Проспект, 2010.
3. Статистика: учеб. / под ред. С.А. Орехова. М.: Эксмо, 2010.
4. Эконометрика: учеб. / И.И. Елисеева [и др.]; под ред. И.И. Елисеевой. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2006.
5. Пожары и пожарная безопасность в 2014 году: Статистический сборник / под общ. ред. А.В. Матюшина. М.: ВНИИПО, 2015.