

Научная статья

УДК 536.2

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА

✉ **Лабинский Александр Юрьевич.**

**Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, Санкт-Петербург, Россия**

✉ [labynsci@yandex.ru](mailto:labynsci@yandex.ru)

*Аннотация.* Рассмотрены компьютерные модели расчета теплопроводности в стержне постоянного сечения, изменения температуры жидкости по длине трубы и расчета двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе.

Компьютерные модели расчета теплопроводности и изменения температуры жидкости по длине трубы реализованы средствами электронных таблиц Excel.

Компьютерная модель течения жидкости в трубе реализована в виде программы для ЭВМ. Приведены результаты моделирования процессов теплопроводности и теплообмена.

Подробно рассмотрена постановка задачи моделирования процессов теплообмена с использованием численного метода решения задачи Коши в форме конечных разностей. Такой подход позволяет вычислить значение исследуемого параметра в любой точке исследуемого объекта. Численный метод включает в себя получение системы алгебраических уравнений для неизвестных переменных и алгоритм решения этих уравнений.

Приведены основные зависимости, описывающие процесс теплопроводности в стержне конечной длины. Результаты расчета изменения температуры по длине стержня представлены в наглядном графическом виде.

Приведены основные зависимости, описывающие процесс изменения температуры текущей по трубе жидкости. Результаты расчета изменения температурного напора по длине трубы представлены в наглядном графическом виде.

Подробно рассмотрена постановка задачи и математическая модель процесса течения несжимаемой жидкости в трубе. На основе разработанной математической модели создана компьютерная модель, реализованная в виде программы для ЭВМ. Представлены результаты расчета с помощью метода прогонки двумерного температурного поля жидкости по длине трубы. Зависимости температур жидкости в различных узловых точках сечения трубы по длине трубы представлены в наглядном графическом виде.

*Ключевые слова:* теплообмен, теплопроводность, температурное поле, численный метод, математическая модель, компьютерная модель, программа для ЭВМ

**Для цитирования:** Лабинский А.Ю. Компьютерное моделирование процессов теплообмена // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2023. № 1 (45). С. 110–119.

Scientific article

## THE COMPUTING MODELING THE HEAT EXCHANGE PROCESS

✉ **Labinskiy Alexander Yu.**

**Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia, Saint-Petersburg, Russia**

✉ [labynsci@yandex.ru](mailto:labynsci@yandex.ru)

*Abstract.* The article considers mathematical models of calculation of thermal conductivity in a constant cross-section rod, change of a liquid temperature along the length of the pipe and calculation of two-dimensional temperature field of liquid under the flow in the pipe.

The mathematical model of fluid flow in the tube is realized in the form of a program for computers. The results of modeling of processes of heat conduction and heat exchange are presented.

The task of simulation of heat exchange processes using numerical method of solving the Cauchy problem in the form of finite differences is considered in detail. This approach makes it possible to calculate the value of the studied parameter at any point of the object under investigation. The numerical method involves obtaining a system of algebraic equations for unknown variables and an algorithm for solving these equations.

The main dependencies describing the process of thermal conductivity in the rod of the final length are given. The results of the calculation of the temperature change by the length of the rod are presented in a graphical presentation.

The main dependencies describing the process of temperature change of the liquid flowing through the pipe are given. The results of the calculation of temperature pressure change over the length of the pipe are presented in a graphical presentation.

The problem statement and mathematical model of the process of flow of incompressible liquid in the pipe are considered in detail. On the basis of the developed mathematical model, a computer model, implemented in the form of a program for computers, was created. The results of calculation, using the method of running, of two-dimensional temperature field of liquid along the pipe length are presented. The temperature dependence of the liquid in the various nodal points of the pipe section along the length of the pipe is presented in a graphical form.

*Keywords:* heat exchange, heat conductivity, temperature field, numerical method, mathematical model, computing model, computing program

**For citation:** Labinskiy A.Yu. The computing modeling the heat exchange process // Prirodnye i tekhnogennye riski (fiziko-matematicheskie i prikladnye aspekty) = Natural and man-made risks (physico-mathematical and applied aspects). 2023. № 1 (45). P. 110–119.

## Введение

Математические модели, базирующиеся на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, часто встречаются в различных областях науки и техники. Аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений применяется в задачах движения различных объектов, при расчете электрических цепей, радиоактивного распада, при описании квантовых систем, в различных задачах теплофизики, в экономических и социологических моделях и многих других задачах [1–3].

На практике ряд физических задач приводит к необходимости решения задачи Коши следующего вида:

$$dY/dx = f(x, Y), \quad Y(0) = Y_0,$$

где  $Y$  – исследуемый параметр объекта (плотность, скорость, температура и т.п.);  $x$  – координата объекта (координата по длине пластины, стержня, трубы и т.п.).

Если рассматривается не одно уравнение, а система уравнений, то под  $Y_0$ ,  $Y$  и  $f$  следует понимать векторы начальных условий, искомых функций и правых частей соответственно.

Аналитические решения задач теплообмена, полученные путем непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый процесс, дают возможность вычислить значение исследуемого параметра в любой точке данного объекта [4, 5].

В противоположность аналитическим решениям, в основу численного метода положено уравнение в форме конечных разностей, с помощью которого можно вычислить значение исследуемого параметра в некоторых заранее выбранных точках данного объекта. Это равноценно математическим способам приближенного интегрирования. При этом в отличие от точного аналитического решения, для которого характерны трудности удовлетворения граничных условий, при помощи численного решения всегда возможно, хотя бы приближенно, удовлетворить граничным условиям данной задачи [6–8].

Одним из численных методов является широко используемый метод конечных разностей. Сущность метода состоит в том, что в дифференциальном уравнении производные искомой функции заменяются приближенными соотношениями между конечными разностями в отдельных узловых точках исследуемого объекта.

В качестве основных неизвестных в численном методе рассматриваются значения зависимой переменной в конечном числе точек (сеточных узлах или узловых точках) расчетной области. Численный метод включает в себя получение системы алгебраических

уравнений для неизвестных переменных и алгоритм решения этих уравнений. Именно это упрощение, связанное с использованием алгебраических, а не дифференциальных уравнений, делает численные методы широко используемыми [6, 7].

Сущность всякого метода численного решения данной задачи сводится к тому, каким образом по заданному значению  $Y^n$  определить значение в следующей узловой точке  $Y^{n+1}$ .

Алгоритм численного решения указанной задачи можно записать так:

$$(Y^{n+1} - Y^n) / \Delta x = F(x^{n+1}, Y^{n+1}, Y^n, (dY/dx)^{n+1}, (dY/dx)^n),$$

где специфика метода решения содержится в функции  $F$ .

Данное уравнение называется разностным аналогом исходного уравнения задачи Коши, так как производная по координате заменена конечной разностью. Процедуру замены дифференциальных соотношений разностными называют аппроксимацией. Качество разностного аналога характеризуется локальной погрешностью аппроксимации.

Сформулируем постановку задачи, результаты решения которой представлены в данной статье. Необходимо произвести компьютерное моделирование процессов теплопроводности в стержне постоянного сечения, изменения температуры жидкости по длине трубы и изменения двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе.

Существует большое число средств моделирования (пакеты Mathematics, MATLAB, MapleMathCAD, COMSOL, FlowVision и т.п.) производства известных «западных» компаний. Однако цена таких пакетов начинается от 100 000 руб. (лицензия на год), занимаемый объем памяти составляет от 500 Мб и выше.

Технологическая независимость России, в том числе в области программного обеспечения, является основой устойчивого развития. В условиях санкций «западных» стран была сформулирована проблема – разработка отечественного софта и цель данного исследования – создание компьютерных моделей указанных процессов с помощью электронной таблицы Excel и системы визуального программирования Delphi на языке программирования Object Pascal.

Автор имеет опыт создания систем компьютерного моделирования, например, системы SMS, позволяющий разрабатывать компьютерные модели в виде консольных программ для ЭВМ на основе базовых шаблонов, описывающие системы массового обслуживания, системы автоматического управления, использующие нечеткую логику, нечеткую кластеризацию, нейронные сети, генетические алгоритмы и методы решения дифференциальных уравнений [9, 10].

Тема статьи актуальна, так как импортозамещение программного обеспечения в госсекторе регулируется законодательными нормативными актами Российской Федерации, согласно которым к 2024 г. доля отечественного софта в госструктурах должна превышать 90 %, а в госкомпаниях – 70 %.

Новизна исследования, отражающая личный вклад автора, заключается в разработке компьютерной модели течения жидкости в трубе, реализованной в виде программы для ЭВМ, с помощью которой проведены компьютерные эксперименты по расчету двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе. В результате расчетов, выполненных с использованием метода прогонки «поперек трубы», получены значения температур жидкости по длине трубы, причем в каждом сечении по длине трубы получены значения температур жидкости в пяти узловых точках.

### **Теплопроводность в стержне постоянного сечения**

Рассмотрим распространение тепла в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине. Обозначим количество тепла, поступающего через торцевую поверхность стержня, через  $Q_x$ . Обозначим площадь поперечного сечения стержня через  $F$  и периметр через  $P$ . Стержень длиной  $L$  находится в жидкости с постоянной температурой

$T_{ж} = \text{const}$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  от поверхности стержня к окружающей среде будем считать постоянным:  $\alpha = \text{const}$ . Коэффициент теплопроводности материала стержня  $\lambda$  достаточно велик, что позволяет считать температуру стержня меняющейся только вдоль оси стержня. Температуру стержня обозначим через  $T_{ст}$ , тогда избыточная по отношению к жидкости температура стержня:  $\theta = T_{ст} - T_{ж}$ .

Согласно закону Фурье:

$$Q_x = -\lambda * F * d\theta/dx,$$

где  $Q_x$  – количество тепла, входящего в торец стержня;  $x$  – координата по длине стержня.

Изменение температуры на отрезке  $dx$  равно:

$$dQ = \theta + d\theta/dx * dx.$$

Тогда для количества тепла, выходящего из противоположного торца элемента  $dx$ , имеем:

$$Q_{x+dx} = -\lambda * d/dx(\theta + d\theta/dx * dx) * F = -\lambda * F * d\theta/dx - \lambda * F * dx * d^2\theta/dx^2.$$

Отсюда:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx} = \lambda * F * dx * d^2\theta/dx^2.$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона-Рихмана:

$$dQ = \alpha * \theta * P * dx.$$

Приравнивая эти уравнения, получим:

$$d^2\theta/dx^2 = \alpha * \theta * P / (\lambda * F) = m^2 * \theta,$$

где  $m = \sqrt{[(\alpha * P) / (\lambda * F)]}$  [1/м]; размерности величин:  $m = [1/м]$ ,  $\alpha = [Вт/(м^2 * К)]$ ,  $P = [м]$ ,  $\lambda = [Вт/(м * К)]$ ,  $F = [м^2]$ .

Общий интеграл уравнения  $d^2\theta/dx^2 = m^2 * \theta$  будет иметь вид:

$$\theta = C_1 * e^{mx} + C_2 * e^{-mx},$$

где значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий.

Для стержня конечной длины, в случае когда теплоотдачей с конца стержня можно пренебречь, граничные условия можно записать в виде:

при  $x = 0 \rightarrow \theta = T_1$  – температура основания стержня;

при  $x = L \rightarrow d\theta/dx = 0$ .

Тогда уравнение, определяющее температуру в любом сечении стержня, будет иметь вид:

$$T = T_1 * \{ \text{ch}[m * (L - x)] / \text{ch}(m * L) \}.$$

В предельном случае, когда  $x = L$ , формула принимает вид:

$$T_{x=L} = T_1 / \text{ch}(m * L).$$

Математическая модель изменения температуры по длине стержня была реализована в виде компьютерной модели с использованием электронной таблицы Excel, позволяющей представлять результаты расчета в графическом виде.

Исходные данные: медный стержень с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 400$  [Вт/(м\*К)] длиной  $L = 1,0$  м и площадью поперечного сечения  $F = 0,001$  м<sup>2</sup>. Коэффициент теплоотдачи стержня к жидкости  $\alpha = 250$  [Вт/(м<sup>2</sup>\*К)]. Температура основания стержня  $T_1 = 80$  °С. Результаты расчета изменения температуры по длине стержня представлены на рис. 1.

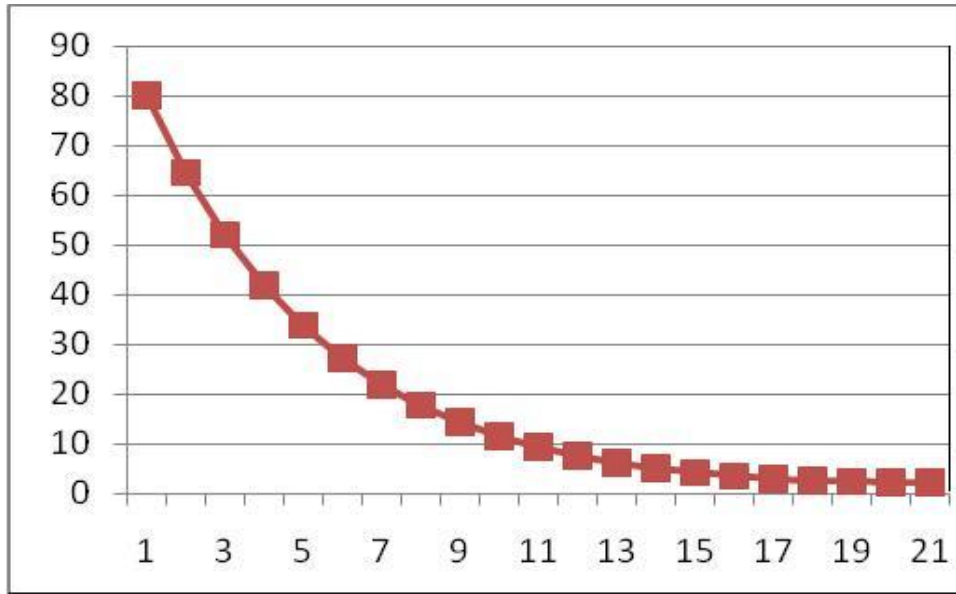


Рис. 1. Изменение температуры по длине стержня

### Изменение температуры жидкости по длине трубы

Рассмотрим течение жидкости в трубе. Периметр трубы  $P$ [м], начальная температуры жидкости  $T_{ж0}$  [С], массовый расход жидкости  $G$  [кг/с], теплоемкость жидкости  $c_p$ [кДж/(кг\*С)] и коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке трубы  $\alpha$ [Вт/(м<sup>2</sup>\*С)] известны.

Для элемента трубы длиной  $dx$  можно записать:

$$q(x) \cdot P \cdot dx = \alpha \cdot (T_c - T_{ж}) \cdot P \cdot dx = G \cdot c_p \cdot dT,$$

где  $q(x)$  – тепловой поток от жидкости к стенке трубы [Вт/м<sup>2</sup>].

Данное уравнение можно представить в виде:

$$dT/dx + f(x) \cdot T = g(x), \quad f(x) = \alpha(x) \cdot P / (G \cdot c_p), \quad g(x) = f(x) \cdot T_c(x),$$

где  $T_c$  – температура стенки трубы.

Для решения данного дифференциального уравнения используем метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной), согласно которому решение примет вид:

$$T = c(x) \cdot \exp[-\int_0^x f(x) dx],$$

где  $c(x)$  – произвольная постоянная, которая может быть найдена из граничных условий.

Обозначая  $\vartheta = T_{ж} - T_c$ , решение дифференциального уравнения можно записать в следующем виде:

$$\vartheta = \vartheta_0 * \exp[-\int_0^x \alpha(x) * P / (G * c_p) dx],$$

где  $\vartheta_0$  – начальная разность температур на входе в трубу (при  $x = 0$ ).

Если коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке трубы  $\alpha$  по длине трубы не меняется ( $\alpha = \text{const}$ ), а температура стенки трубы постоянна ( $T_c = \text{const}$ ), то уравнение изменения температуры по длине трубы будет иметь вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 * \exp[-x * \alpha * P / (G * c_p)].$$

Исходные данные для расчета: периметр трубы  $P = 0,001$  [м], коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке трубы  $\alpha = 500$  [Вт/(м<sup>2</sup>\*С)], расход жидкости  $G = 0,1$  [кг/с], теплоемкость жидкости  $c_p = 4,0$  [кДж/(кг\*С)], начальная разность температур  $\vartheta_0 = T_{ж} - T_c = 100$  °С.

Математическая модель изменения температурного напора жидкости по длине трубы была реализована в виде компьютерной модели с использованием электронной таблицы Excel, позволяющей представлять результаты расчета в графическом виде.

Результаты расчета – график изменения температурного напора  $\vartheta = T_{ж} - T_c$  по длине трубы (координата по длине трубы  $x$ ) при постоянной температуре стенки трубы ( $T_c = \text{const}$ ) и постоянном значении коэффициента теплоотдачи от жидкости к стенке трубы ( $\alpha = \text{const}$ ) представлены на рис. 2.

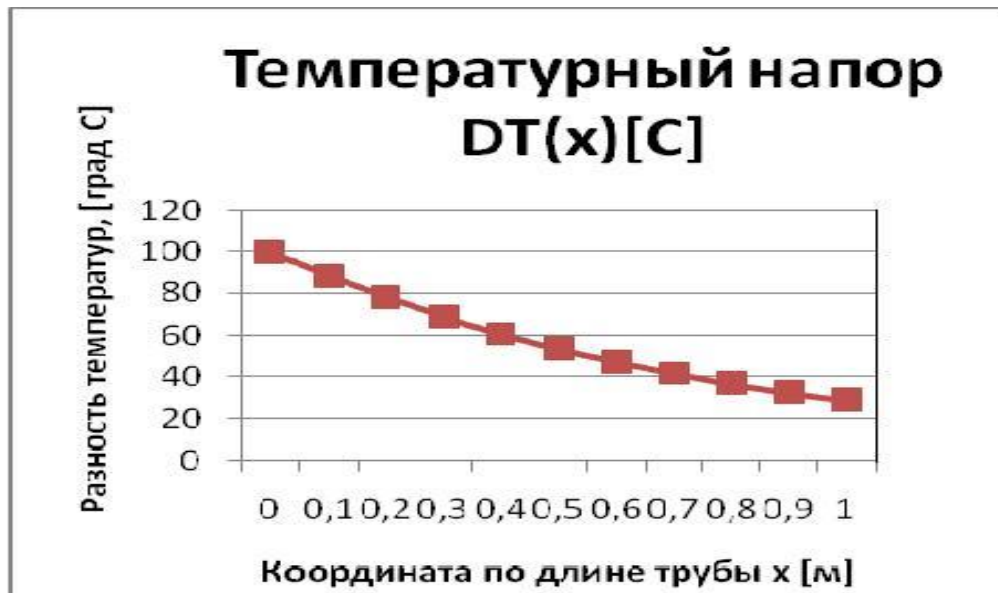


Рис. 2. Изменение температурного напора  $DT(x)=T_{ж} - T_c$  по длине трубы

### Расчет двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе. Конечно-разностные схемы для уравнения энергии

Простейшее одномерное стационарное уравнение энергии имеет вид:

$$c * \rho * v * \partial T / \partial x = \lambda * \partial^2 T / \partial x^2.$$

Введем равномерную пространственную сетку  $x_n = (n-1) * h$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Конечно-разностное уравнение для внутренней точки строим методом баланса, выбрав элементарные объемы вида:  $[x_n - h/2, x_n + h/2]$ . Сеточную функцию численного решения обозначим через  $U_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Уравнение баланса  $n$ -го элементарного объема для единичного промежутка времени имеет вид:

$$Q^k(x_n + h/2) - Q^k(x_n - h/2) + Q^T(x_n + h/2) - Q^T(x_n - h/2) = 0,$$

где  $Q^k$  – энтальпия потока жидкости;  $Q^T$  – количество теплоты за счет процесса теплопроводности.

Количество теплоты за счет теплопроводности может быть аппроксимировано следующим образом:

$$Q^T(x_n + h/2) \approx \lambda * (U_n - U_{n+1}) / h; \quad Q^T(x_n - h/2) \approx \lambda * (U_{n-1} - U_n) / h.$$

Тепловые потоки жидкости аппроксимируются различным образом:

$$Q^k(x_n + h/2) \approx c * \rho * v * U_{n+1}, \quad Q^k(x_n - h/2) \approx c * \rho * v * U_n, \quad (1)$$

$$Q^k(x_n + h/2) \approx c * \rho * v * (U_{n+1} + U_n) / 2, \quad Q^k(x_n - h/2) \approx c * \rho * v * (U_n + U_{n-1}) / 2, \quad (2)$$

$$Q^k(x_n + h/2) \approx c * \rho * v * U_n, \quad Q^k(x_n - h/2) \approx c * \rho * v * U_{n-1}. \quad (3)$$

Проанализируем соотношения (1)–(3), учитывая, что жидкость течет в направлении оси X, проходя через элементарные объемы в порядке возрастания их номеров.

В аппроксимации (1) принято, что температура втекающей в элементарный объем жидкости равна температуре центра объема, а температура вытекающей – температуре центра следующего за ним по течению объема. Однако физика процесса такова, что температура жидкости должна определяться только условиями ее протекания и теплообмена в предшествующих объемах.

В аппроксимации (2) принято, что жидкость втекает в элементарный объем с температурой, равной полусумме температур данного и предыдущего объемов, а вытекает с температурой, равной полусумме температур данного и следующего за ним по течению объема. Данный случай не противоречит физике процесса, однако при больших скоростях течения жидкости температура  $U_n$  может упасть ниже значения  $U_{n-1}$ , что вызовет в численном решении немонотонность распределения температуры.

Аппроксимация (3), в которой через левую границу объема втекает жидкость с температурой предшествующего объема, а через правую границу вытекает жидкость с температурой данного объема, хорошо работает при больших скоростях течения.

Формулы (1)–(3) можно трактовать также следующим образом.

В уравнении (1) производная  $\partial T / \partial x \approx (U_{n+1} - U_n) / h$  аппроксимируется разностью вперед по направлению потока жидкости, в уравнении (2) производная  $\partial T / \partial x \approx (U_{n+1} - U_{n-1}) / 2 * h$  аппроксимируется центральной разностью, а производная  $\partial T / \partial x \approx (U_n - U_{n-1}) / h$  в уравнении (3) аппроксимируется разностью назад или разностью «против потока».

### Математическая модель

Постановка задачи: производится расчет двумерного температурного поля несжимаемой жидкости  $T(r, z)$ , протекающей в трубе радиусом  $R$  и длиной  $L$ . Температура жидкости на входе в трубу постоянна по поперечному сечению и равна  $T_{вх}$ . На внутренней поверхности трубы задано либо распределение по длине трубы температуры стенки  $T_w(z)$ , либо плотности теплового потока  $Q_w(z)$ . Течение жидкости считается гидродинамически стабилизированным, то есть поперечная составляющая скорости равна нулю, а продольная не меняется по длине трубы.

Предполагается, что теплофизические свойства жидкости не зависят от температуры и что диссипация энергии за счет вязкого трения и работа сил давления пренебрежимо малы. В этих условиях стационарное уравнение энергии имеет вид:

$$c * \rho * v_z * \partial T / \partial z = \lambda * [ (1/R * \partial / \partial R * (R * \partial T / \partial R)) + \partial^2 T / \partial z^2 ]. \quad (4)$$

Если пренебречь переносом теплоты вдоль трубы, то уравнение (4) примет вид параболического уравнения в частных производных:

$$c \cdot \rho \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = (\lambda / R) \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot \frac{\partial T}{\partial R}).$$

Граничные условия можно записать так:

- на оси трубы условие симметрии:  $\frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0$ ;
- на стенке трубы ( $r = R$ ) задается либо распределение температуры:  $T(r, z)_{r=R} = T_w(z)$ , либо распределение плотности теплового потока:  $\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{r=R} = Q_w(z)$ ;
- во входном сечении трубы ( $z = 0$ ) задается температура входящего потока:  $T(r, z)_{z=0} = T_{вх}$ .

На выходе из трубы граничное условие не ставится, так как принято:  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ .

После определения температурного поля можно в любом сечении трубы определить локальные коэффициенты теплоотдачи:

$$\alpha(z) = [\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{r=R}] / [T_{r=R} - T_{ср}(z)],$$

где  $T_{ср}(z)$  – среднерасходная температура жидкости в сечении  $z$ .

Полученная система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки «поперек трубы».

На основе разработанной математической модели была создана компьютерная модель, реализованная в виде программы для ЭВМ, с помощью которой были выполнены вычислительные эксперименты с целью расчета двумерного температурного поля жидкости по длине трубы. В результате расчетов в каждом сечении по длине трубы получены значения температур жидкости в пяти точках на радиусе от  $R_1 = 1 \cdot dR$  до  $R_5 = 5 \cdot dR$ .

Окно программы расчета двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе, а также результаты расчета приведены на рис. 3, 4.

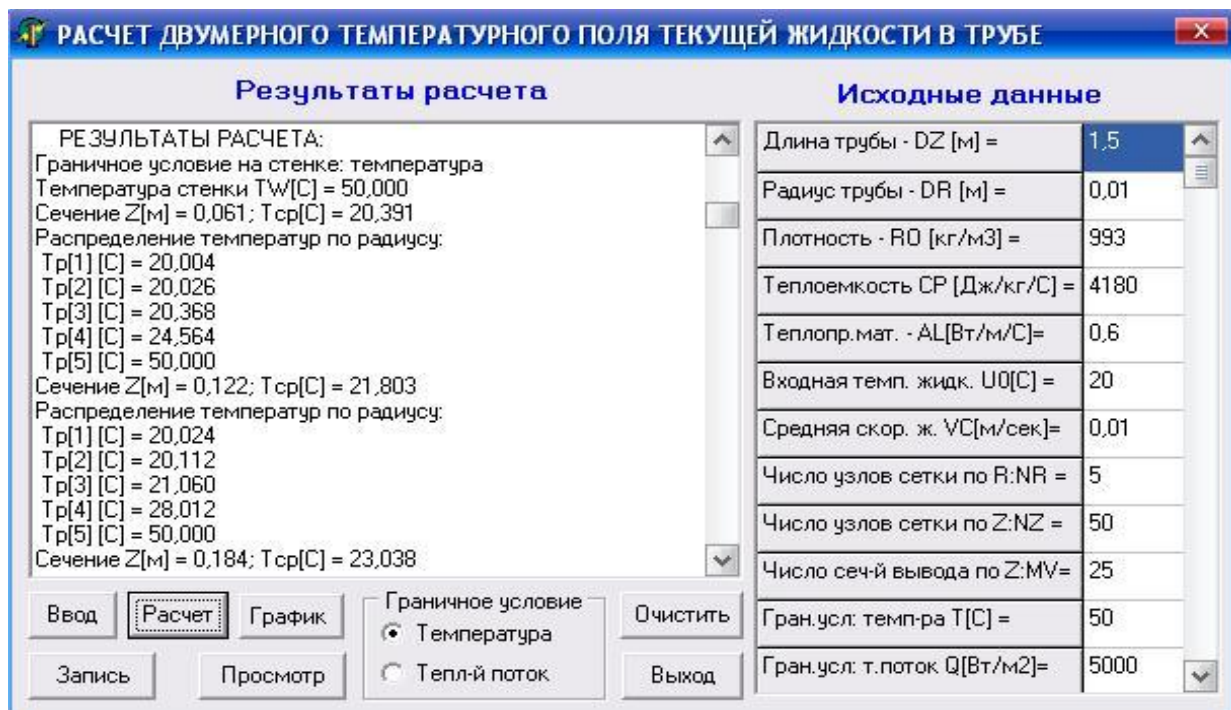


Рис. 3. Окно программы расчета двумерного температурного поля



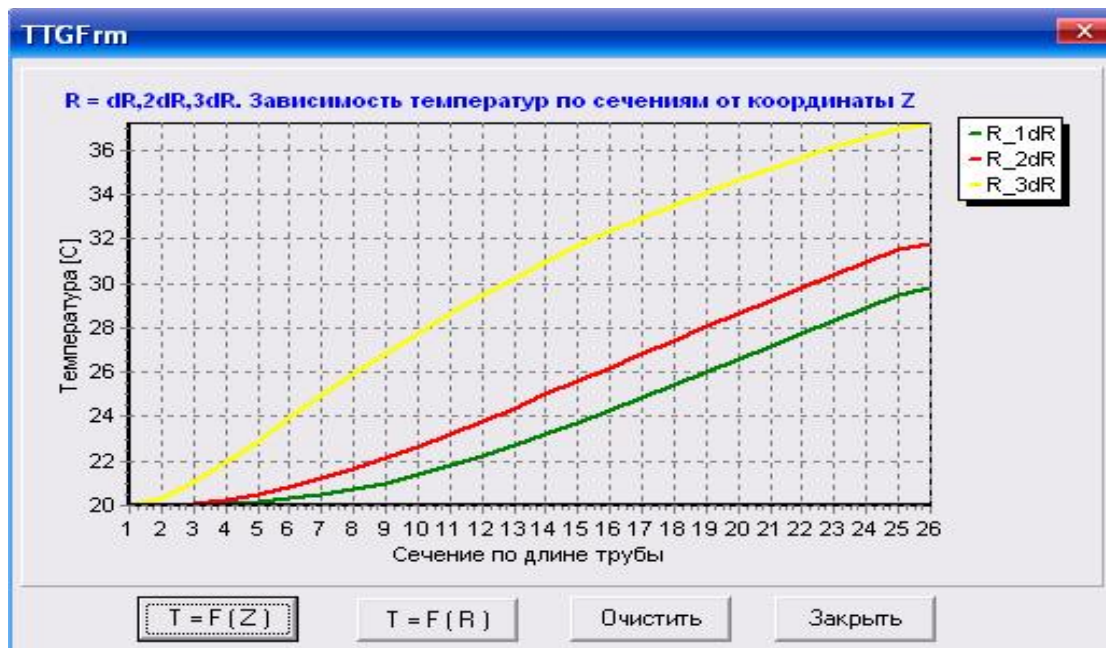


Рис. 4. Зависимость температур жидкости по длине трубы

В каждом сечении по длине трубы на рис. 4 приведены значения трех температур: на радиусе  $R_1 = 1 \cdot dR$  (линия зеленого цвета), на радиусе  $R_2 = 2 \cdot dR$  (линия красного цвета) и на радиусе  $R_3 = 3 \cdot dR$  (линия желтого цвета).

### Вывод

Рассмотрены компьютерные модели расчета теплопроводности в стержне постоянного сечения, изменения температуры жидкости по длине трубы и расчета двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе.

Первые две компьютерные модели реализованы средствами электронной таблицы Excel, в которой проведены расчеты, позволившие получить значения изменения температуры по длине стержня и изменения температурного напора между жидкостью и стенкой по длине трубы.

Третья компьютерная модель разработана в среде Delphi и реализована в виде программы для ЭВМ, с помощью которой проведены компьютерные эксперименты по расчету двумерного температурного поля жидкости при течении в трубе. В результате расчетов, выполненных с использованием метода прогонки «поперек трубы», получены значения температур жидкости по длине трубы, причем в каждом сечении по длине трубы получены значения температур жидкости в пяти узловых точках.

### Список источников

1. Теплотехника. Практический курс / Г.А. Круглов [и др.]. М.: Лань, 2017.
2. Дерюгин В.В., Васильев В.Ф., Уляшева В.М. Тепломассообмен. М.: Лань, 2018.
3. Логинов В.С., Юхнов В.Е. Практикум по основам теплотехники. М.: Лань, 2019.
4. Christian W. Technische Wärmelehre. Leipzig, 2014.
5. Eckert E., Drake R. Heat and Mass Transfer. London, 2015.
6. Technische Thermodynamik. Dresden: Verlag Theodor Steinkopf, 2015.
7. Jakob M. Heat Transfer. New York and London, 2016.
8. Christian W. Technische Wärmelehre. Leipzig, 2014.
9. Лабинский А.Ю. К вопросу разработки средств имитационного моделирования // Науч.-аналит. журн. «Вестник С.-Петерб. ун-та ГПС МЧС России». 2020. № 3. С. 145–153.
10. Лабинский А.Ю. Компьютерное моделирование: монография. СПб.: С.-Петерб. ун-т ГПС МЧС России, 2021.

## References

1. Teplotekhnika. Prakticheskij kurs / G.A. Kruglov [i dr.]. M.: Lan', 2017.
2. Deryugin V.V., Vasil'ev V.F., Ulyasheva V.M. Teplomassoobmen. M.: Lan', 2018.
3. Loginov V.S., Yuhnov V.E. Praktikum po osnovam teplotekhniki. M.: Lan', 2019.
4. Christian W. Technische Wärmelehre. Leipzig, 2014.
5. Eckert E., Drake R. Heat and Mass Transfer. London, 2015.
6. Technische Thermodynamik. Dresden: Verlag Theodor Steinkopf, 2015.
7. Jakob M. Heat Transfer. New York and London, 2016.
8. Christian W. Technische Wärmelehre. Leipzig, 2014.
9. Labinskij A.Yu. K voprosu razrabotki sredstv imitacionnogo modelirovaniya // Nauch.-analit. zhurn. «Vestnik S.-Peterb. un-ta GPS MCHS Rossii». 2020. № 3. S. 145–153.
10. Labinskij A.Yu. Komp'yuternoe modelirovanie: monografiya. SPb.: S.-Peterb. un-t GPS MCHS Rossii, 2021.

## Информация о статье:

Поступила в редакцию: 14.02.2023

Принята к публикации: 10.03.2023

## The information about article:

Article was received by the editorial office: 14.02.2023

Accepted for publication: 10.03.2023

## Информация об авторах:

**Лабинский Александр Юрьевич**, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России (196105, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 149), кандидат технических наук, доцент, e-mail: labynsciy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-2735-4189>

## Information about the authors:

**Labinsky Alexander Yu.**, associate professor of the department of applied mathematics and information technologies of Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia (196105, Saint-Petersburg, Moskovsky ave., 149), candidate of technical sciences, associate professor, e-mail: labynsciy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-2735-4189>